

Emergence en action : les particules comme structures de champs

Partie 4 : de l'interaction entre champs classiques à l'interaction entre particules

Adrien Vila Valls

Introduction

Nous allons dans cette partie aborder des concepts et des phénomènes que l'on ne trouve que très rarement abordés dans un cadre classique. Généralement, ces concepts sont réservés à des introductions à la théorie quantique des champs. Cependant, le parti pris ici est de considérer les champs comme purement classiques. L'objectif est de fournir au lecteur une interprétation plus intuitive de ces phénomènes avant de les étudier plus tard dans un cadre quantique.

Les concepts que nous allons aborder à tour de rôle sont les suivants :

- Interactions par l'intermédiaire de champs médiateurs.
- Portée des interactions.
- Seuil d'excitation des champs.
- Solitons et tachyons.
- Champs chargés.
- Matière et antimatière.
- Création et annihilation de la matière.
- Emergences d'effets relativistes.

La théorie quantique est bien sûr indispensable pour comprendre comment ces phénomènes se produisent effectivement dans le monde réel, mais ce sont souvent les mêmes structures mathématiques sous-jacentes qui permettent d'en rendre compte dans le cadre classique.

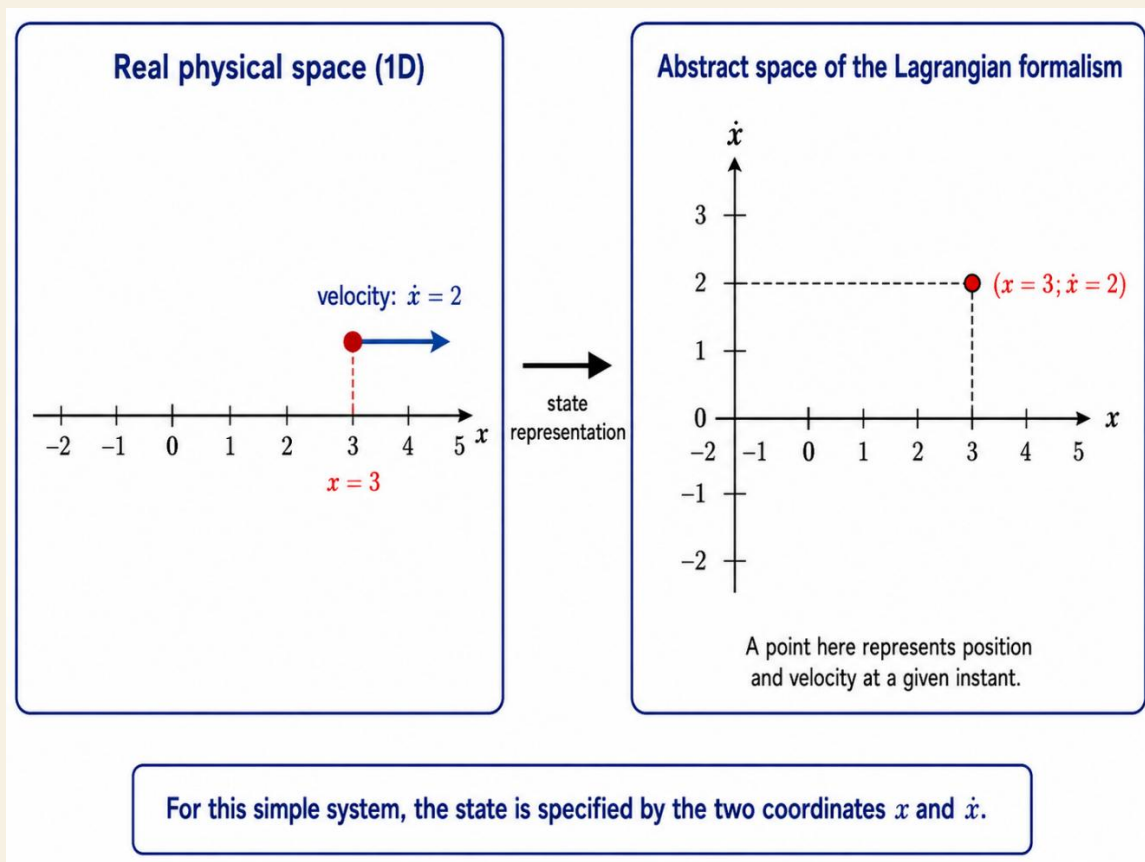
Avant d'aborder ces phénomènes, nous allons faire une parenthèse un peu abstraite. Nous allons aborder un formalisme qui rend de nombreux services : le formalisme Lagrangien. Ce formalisme permet de formuler une théorie physique en mettant en évidence les symétries et les quantités conservées. Il se révèle très utile en théorie classique des champs et complètement indispensable en théorie quantique des champs. Dans l'esprit de cette série d'articles, nous allons essayer de fournir le minimum en termes de technicité, en nous concentrant sur la compréhension conceptuelle. Nous n'allons donc pas expliciter toutes les démonstrations et nous allons parfois, lorsque cela ne nuit pas à la compréhension profonde de la physique, sauter assez rapidement aux résultats importants.

I. Formalisme Lagrangien

La formulation lagrangienne de la mécanique classique est une formulation alternative à la formulation newtonienne. Elle permet de dériver les équations du mouvement en utilisant les systèmes de variables les plus pratiques et en mettant en évidence les symétries du système et les quantités conservées.

I.1 Le cadre : l'espace des états

Dans le formalisme Lagrangien, nous ne suivons pas le système dans l'espace physique mais dans un espace abstrait : l'espace des états. L'état d'un système à N degrés de liberté possède un espace des états de $2N$ dimensions. Son état y est noté par un point dans cet espace. Pour rendre les choses plus concrètes, considérons simplement un point matériel qui se déplace dans un espace réel à $1D$. Sa position dans l'espace réel y est représentée par la variable x . Dans le formalisme lagrangien, nous pouvons construire un espace des états en $2D$: l'axe des x qui correspond directement à la position dans l'espace, et l'axe des $\dot{x}$, qui correspond à la vitesse de la particule. Un point dans cet espace (par exemple : $x=3$; $\dot{x}=2$) symbolise directement la valeur de la position et de la vitesse de notre particule à un moment donné. Le formalisme Lagrangien nous fournit les équations du mouvement pour ce point dans l'espace des états.



I.2 Le principe de moindre action et l'équation d'Euler-Lagrange

À l'origine du formalisme lagrangien il y a le principe de moindre action, qui stipule :

Soit un système physique à N degrés de liberté, dont l'état initial est représenté par un point dans l'espace $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN})$ et l'état final par un autre point $(x_{f1}, x_{f2}, \dots, x_{fN})$. Alors il existe une fonctionnelle (une fonction de fonctions) $S(\dots x_N(t), \dots \dot{x}_N(t))$, que l'on nomme *action*, qui est stationnaire pour tout changement infinitésimal de la trajectoire réelle du système dans l'espace $(\dots x_N(t))$. Pour alléger les notations, on va prendre dans ce qui suit une particule se déplaçant dans un espace de $1D$ et nous allons noter $\dot{x} = v$. L'action est définie par :

$$S(x(t), v(t)) = \int_{t_i}^{t_f} L(x(t), v(t)) dt$$

où L est le Lagrangien du système.

La condition de stationnarité de l'action s'écrit $\delta S = 0$ pour toute variation infinitésimale de la trajectoire du système dans son espace de configuration. Pour que cette condition soit respectée, on peut montrer que le Lagrangien doit obéir à l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$$

Cette équation est équivalente à la seconde équation de Newton. Pour le voir, il faut préciser ce qu'est le Lagrangien. En mécanique classique, le Lagrangien est tout simplement défini par la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - V(x)$$

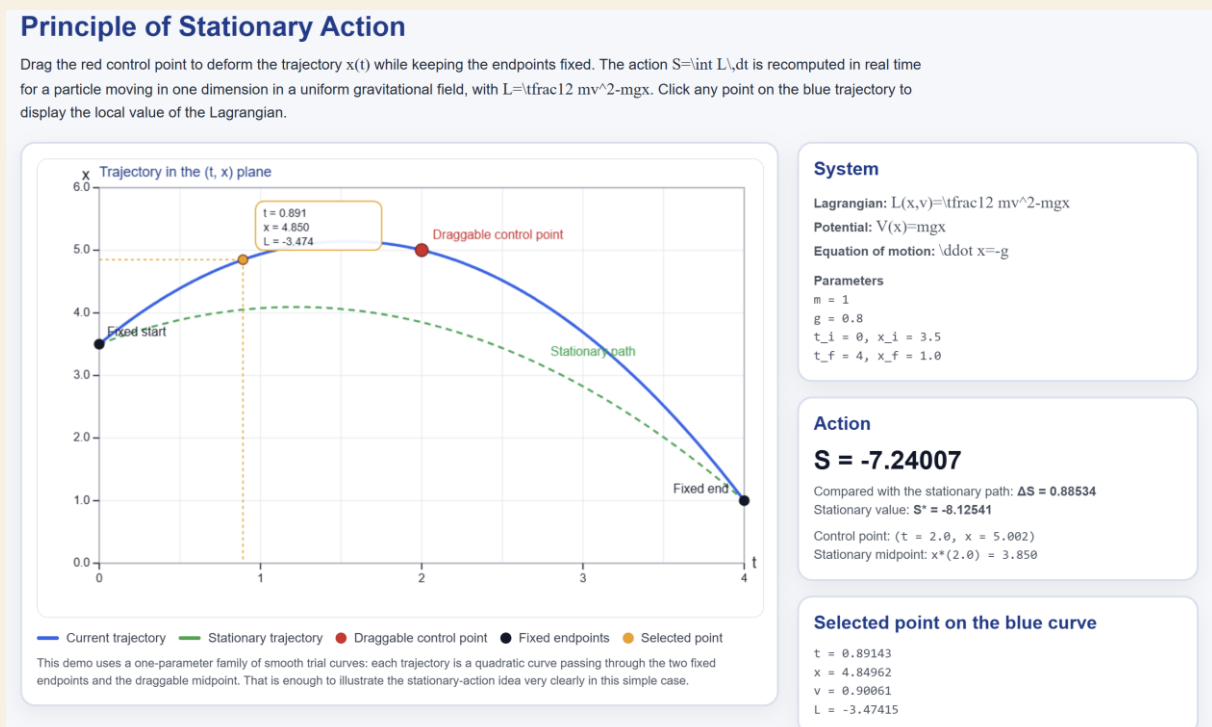
En injectant l'expression de L dans l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient directement :

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

qui correspond bien à la deuxième loi de Newton.

Si le système a N degrés de liberté, il y a alors N équations d'Euler-Lagrange indépendantes, chacune décrivant l'évolution d'une coordonnée dynamique et de sa dérivée temporelle dans l'espace des états.

Sur le schéma ci-dessous, le système correspond à un objet soumis à un potentiel linéaire (par exemple, une force gravitationnelle constante). On peut par exemple imaginer qu'il s'agit d'un objet lancé verticalement en l'air à $t=0$ à 3.5 mètres du sol et qui se trouve à 1 mètre du sol au temps $t=4$. La question est alors de savoir quelle trajectoire l'objet va effectivement emprunter.



La trajectoire bleue décrit une trajectoire quelconque. La valeur du Lagrangien au point jaune est donnée dans le cadre jaune ($L = -3.474$). L'action S le long de cette trajectoire est calculée et affichée en gros à droite ($S = -7.24007$).

La trajectoire verte représente la trajectoire que l'objet prendra effectivement. La valeur de S le long de cette trajectoire est la valeur minimale : -8.12541 . Plus la trajectoire bleue s'approche de la trajectoire verte, plus la valeur de l'action est stable et proche de la valeur minimale. Les solutions de l'équation d'Euler-Lagrange correspondent aux trajectoires qui rendent l'action stationnaire (ici donc, l'action qui est minimale)

Vous pouvez vous amuser avec [l'animation sur la page de présentation de l'article](#).

NB : la trajectoire n'est modifiable que depuis un point. L'animation ne donne donc accès qu'à une famille de trajectoires. Le principe de moindre action est à comprendre comme un principe de stationnarité sur toutes les familles de trajectoires envisageables.

1.3 Moment conjugué et Hamiltonien

Il existe un formalisme alternatif au formalisme Lagrangien : le formalisme Hamiltonien. Nous n'allons pas le développer ici mais uniquement introduire deux de ses notions : le moment conjugué et le Hamiltonien.

Le moment conjugué d'une variable dynamique $x(t)$ est défini par :

$$p(t) = \frac{\partial L}{\partial v}$$

Il correspond à la quantité de mouvement en mécanique classique. Quant au Hamiltonien, il est défini par

$$H(x, p) = pv - L$$

Ce qui nous donne dans le cas de notre système $1d$:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Le Hamiltonien correspond à l'énergie du système exprimée en fonction du moment conjugué plutôt que de la vitesse.

1.4 Premiers liens entre symétries du système et quantités conservées.

Il existe un théorème important que l'on abordera prochainement dans le cadre de la formulation lagrangienne de la théorie des champs : le théorème de Noether. Ce théorème stipule qu'à toute symétrie du système (c'est-à-dire à toute invariance du Lagrangien par rapport à une transformation) correspond une quantité conservée. Ici, sans aborder le théorème dans sa généralité, nous pouvons dériver très rapidement deux de ses résultats :

- Symétrie de translation spatiale et conservation de la quantité de mouvement

Si $L(x, v)$ ne dépend pas explicitement de x , alors d'après l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) = 0$$

Et donc :

$$\frac{dp}{dt} = 0$$

Ce qui revient à dire que $p = \text{cste}$.

- Symétrie de translation temporelle et conservation de l'énergie

Si $L(x, v)$ ne dépend pas explicitement de t , alors d'après la définition du Hamiltonien :

$$\frac{d}{dt} H(x, p) = 0$$

Et donc :

$$H = cste$$

Le formalisme Lagrangien permet de s'assurer qu'une théorie respecte bien la conservation de certaines quantités.

I.5 Equation de Hamilton-Jacobi

L'équation de *Hamilton-Jacobi* se dérive en prenant la formulation de l'action

$$S(x(t), v(t)) = \int_{t_i}^{t_f} L(x(t), v(t)) dt$$

Si on prend $dS = Ldt$, on a alors

$$\frac{dS}{dt} = L$$

Par ailleurs, par définition :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} v$$

Et on se souvient que :

$$H(x, p) = pv - L$$

Et donc :

$$L = pv - H(x, p)$$

On a donc d'un côté : $\frac{dS}{dt} = pv - H(x, p)$ et de l'autre $\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} v$

Par identification, on a : $p = \frac{\partial S}{\partial x}$ et $\frac{\partial S}{\partial t} = -H(x, \frac{\partial S}{\partial x})$

L'équation de Hamilton-Jacobi est :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(x, \frac{\partial S}{\partial x})$$

Pour une particule dans un espace $1d$, nous avons :

$$H(x, \frac{\partial S}{\partial x}) = \frac{1}{2m} (\frac{\partial S}{\partial x})^2 + V(x)$$

et donc : $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\frac{\partial S}{\partial x})^2 + V(x) = 0$

Cette équation ne semble qu'une formulation complexe de l'énergie mécanique comme somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Elle est cependant intéressante car elle a la forme de l'équation de la phase S d'une onde. L'intérêt majeur de cette formulation est qu'elle transforme la recherche d'une trajectoire en la résolution d'un champ de phase $S(x, t)$. La trajectoire de la particule devient alors analogue à un **rayon lumineux** en optique géométrique : elle est en tout point perpendiculaire aux fronts d'onde d'action constante.

Si le potentiel est indépendant du temps, $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$ où E est une constante qui représente l'énergie du système. L'équation de Hamilton-Jacobi donne directement :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \pm \sqrt{2m(E - V(x))}$$

Soit $W(x)$, la partie de S dépendant de x .

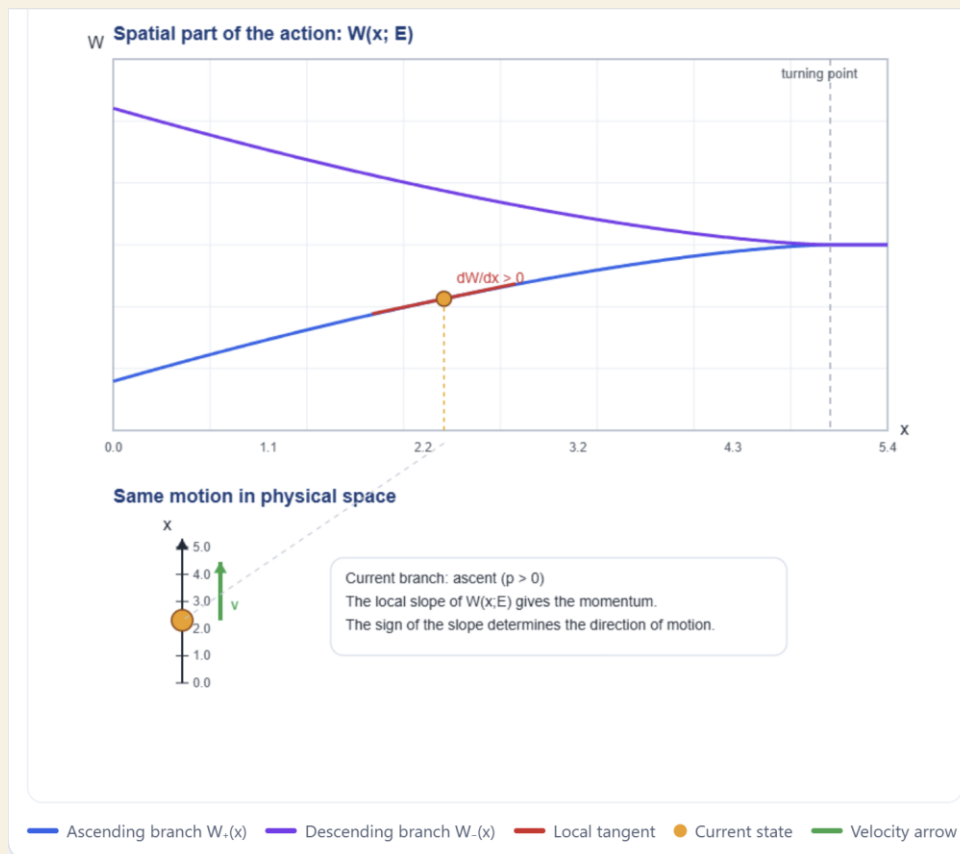
On a donc $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} = \pm \sqrt{2m(E - V(x))}$

Il suffit d'intégrer sur x pour obtenir la forme spatiale de S . Comme $p = mv = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}$, on en déduit que la vitesse de l'objet est tangente à $W(x)$. Autrement dit, l'expression de la composante spatiale de S fournit un champ de vitesse pour l'objet. L'onde de phase S semble guider la particule.

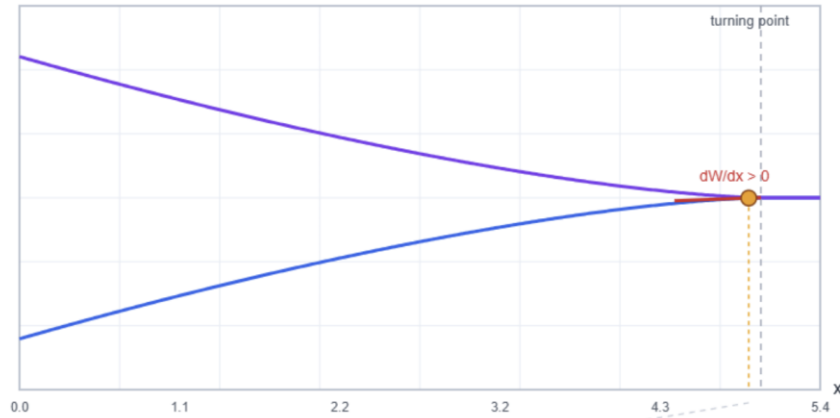
Prenons le cas d'un potentiel linéaire en x , par exemple $V(x) = gx$.

On obtient en intégrant :

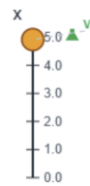
$$W(x) = \mp \frac{2\sqrt{2m}}{3g} (E - gx)^{3/2} + C$$



W Spatial part of the action: $W(x; E)$



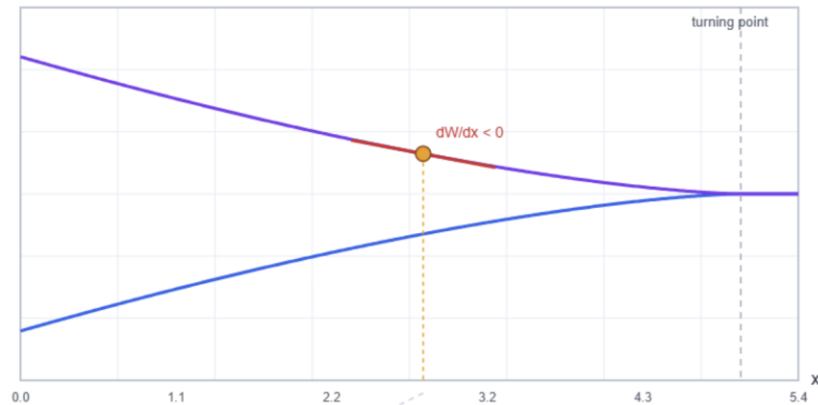
Same motion in physical space



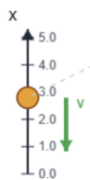
Current branch: ascent ($p > 0$)
The local slope of $W(x; E)$ gives the momentum.
The sign of the slope determines the direction of motion.

— Ascending branch $W_+(x)$ — Descending branch $W_-(x)$ — Local tangent ● Current state — Velocity arrow

W Spatial part of the action: $W(x; E)$



Same motion in physical space



Current branch: descent ($p < 0$)
The local slope of $W(x; E)$ gives the momentum.
The sign of the slope determines the direction of motion.

— Ascending branch $W_+(x)$ — Descending branch $W_-(x)$ — Local tangent ● Current state — Velocity arrow

Sur les images de l'animation ci-dessus, la pente de $W(x)$ au point jaune est proportionnelle à la vitesse de la particule (dont on voit la trajectoire dans l'espace réel en bas). Lors de la phase montante,

l'objet suit simplement la dérivée spatiale de la solution positive de $W(x)$ jusqu'à ce que la vitesse soit nulle. Puis l'objet entame sa trajectoire descendante et suit la dérivée spatiale de la solution négative de $W(x)$. L'animation est disponible [sur la page de présentation de l'article](#).

Nous pouvons montrer une dernière chose grâce à cette équation. Prenons cette fois le cas d'une particule libre ($V=0$). L'équation devient :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = 0$$

Si nous considérons que la particule possède une énergie fixée E , on peut poser :

$$S(x, t) = W(x) - Et$$

L'équation devient alors :

$$E = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2$$

soit

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2mE} + cste$$

Posons $p = \sqrt{2mE}$

$S(x, t)$

devient :

$$S(x, t) = px - Et + cste$$

à comparer avec l'expression de la phase d'une onde :

$$\phi(x, t) = kx - \omega t + cste$$

La correspondance entre action et phase, moment conjugué et nombre d'onde, énergie et pulsation devient transparente.

1.6 Equation d'Euler

Partons de l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + V = 0$$

Si on pose la vitesse de la particule $v = \frac{\partial S}{\partial x}$, alors en appliquant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}$ à l'équation de Jacobi, on obtient l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) v = -\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} V$$

qui est l'équation de la mécanique des fluides pour un fluide fictif qui définit le champ de vitesse d'une particule soumis à un potentiel V . Il s'agit en fait de l'équivalent de la seconde loi de Newton : $\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) v$ est tout simplement égale à $\frac{dv}{dt}$. Cependant, ici, la vitesse est un champ défini sur tout l'espace. Le terme $-\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} V$ est tout simplement égal à $\frac{F}{m}$.

Or, nous verrons qu'il est possible de dériver à partir des équations de champs des équations qui ont la même forme que l'équation d'Euler, ce qui nous permettra de faire directement le lien entre la dynamique des champs et la dynamique des particules correspondantes. Si par exemple nous avons

l'équation d'Euler d'un champ, le champ de vitesse représentera ainsi les vitesses des différents potentiels paquets d'onde.

I.7 Formalisme lagrangien des champs

Pour un champ, on définit une **densité lagrangienne** $\mathcal{L}$ telle que le Lagrangien total est l'intégrale spatiale de cette densité :

$$L = \int d x \mathcal{L} \left(\phi(x, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

L'action S devient alors une intégrale sur l'espace-temps :

$$S = \int d t \int d x \mathcal{L} \left(\phi(x, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

On cherche le champ $\phi(x)$ qui rend l'action stationnaire ($\delta S = 0$) pour une petite variation $\delta \phi(x)$ qui s'annule aux bornes.

On peut alors montrer que la densité $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ doit alors obéir à l'équation fondamentale :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \right) = 0$$

Qui est l'équation d'Euler-Lagrange pour les champs. Cette équation permet de dériver les équations d'onde pour les champs. Pour un système composé de plusieurs champs, il y a autant d'équations d'Euler-Lagrange qu'il y a de champs indépendants.

I.8 Choix des lagrangiens

Grâce au formalisme lagrangien, la partie décisive de la recherche d'une théorie revient à trouver le bon lagrangien. Une fois le lagrangien trouvé, les propriétés du système sont fixées. En théorie des champs, le formalisme lagrangien a un autre avantage : la densité lagrangienne est définie comme un scalaire relativiste, c'est-à-dire un invariant de Lorentz. Il faut donc que l'ensemble des termes qui composent le lagrangien soient eux-mêmes des scalaires de Lorentz, ce qui contraint énormément les choix. Par ailleurs, le respect des symétries qui garantissent la conservation des quantités conservées correspondantes fournit une autre contrainte forte.

Mais si les symétries guident le théoricien, il n'existe pas de recette magique pour s'assurer que le choix du lagrangien est le bon. Une fois le choix effectué, il faut dériver les conséquences observables de la théorie et les confronter aux résultats expérimentaux.

I.9 Le théorème de Noether : de la symétrie à la conservation

Le théorème de Noether est un des piliers de la physique moderne. Il généralise les observations de la section **D** en établissant un lien mathématique rigoureux : **à chaque symétrie continue du Lagrangien correspond une quantité conservée.**

On dit qu'un système possède une symétrie si la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ reste invariante (à une divergence totale près) sous une transformation continue des champs dépendant d'un paramètre infinitésimal ϵ :

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \epsilon \Delta \phi(x)$$

Le théorème de Noether stipule que si cette symétrie existe, il est possible de construire un quadri-vecteur relativiste appelé « **courant de Noether** » J^μ , défini par :

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right)} \Delta \phi$$

où μ représente les composantes spatio-temporelles du vecteur (t, x pour nos modèles en 1D)

(Note : Si la transformation affecte aussi les coordonnées spatio-temporelles, un terme supplémentaire lié au tenseur énergie-impulsion s'ajoute).

Ce courant satisfait l'**équation de continuité** :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

où ρ est la composante temporelle du courant de Noether et j sa composante spatiale.

Cette équation signifie localement que "ce qui sort d'un petit volume est égal à la variation de ce qui s'y trouve".

En intégrant la composante temporelle du courant (ρ , aussi appelée la densité de charge) sur tout l'espace, on obtient une **charge globale Q** :

$$Q = \int \rho dx$$

L'équation de continuité garantit que cette charge est constante dans le temps : $\frac{dQ}{dt} = 0$

On distingue généralement deux types de symétries :

Type de Symétrie	Transformation	Quantité conservée
Espace-temps	Translations temporelles	Énergie
	Translations spatiales	Impulsion (quantité de mouvement)
	Rotations spatiales	Moment cinétique
Internes	Transformations de phase (Jauge)	Charges (électrique, de couleur, etc.)

II. Interaction entre quasi-particules

Dans la partie 3, il a été montré qu'un paquet d'onde pouvait, dans certaines conditions, se comporter temporairement comme une particule obéissant à une dynamique relativiste ou newtonienne. La dynamique d'un tel paquet d'onde n'a été étudiée que dans le cas d'un champ extérieur fixé.

Or, dans les théories physiques usuelles, les champs sont eux-mêmes des systèmes physiques ayant leur propre dynamique.

Dans les formulations modernes de la physique classique, les champs sont émis par les particules. Les particules elles-mêmes sont affectées par les champs. Les particules n'interagissent pas

directement entre elles, mais par l'intermédiaire des champs qui jouent le rôle de médiateurs d'interactions.

En théorie quantique des champs, la situation est décrite d'une manière différente. Fondamentalement, malgré l'image souvent donnée dans les présentations pédagogiques, la théorie quantique des champs ne décrit ni des interactions entre particules, ni même des interactions entre particules et champs, mais des interactions entre champs.

Il n'est toutefois pas nécessaire d'abandonner le cadre classique pour comprendre comment la description familière d'interactions entre particules peut émerger d'une ontologie purement champêtre. Les modèles que nous allons étudier ont précisément pour objectif d'éclairer cette émergence.

II.1 Un modèle mécanique d'interaction entre trois champs

Pour introduire de manière simple l'idée d'une interaction médiée entre quasi-particules, nous allons considérer un modèle mécanique comportant trois champs couplés, notés $A(x, t)$, $B(x, t)$ et $C(x, t)$.

Chacun de ces champs peut être représenté mécaniquement par une chaîne de petites masses identiques reliées entre elles par des ressorts. Les champs A et C joueront le rôle de champs porteurs de paquets d'onde, tandis que le champ B jouera le rôle de champ médiateur.

L'idée physique du modèle est la suivante. Un paquet d'onde présent dans A perturbe localement B . Cette perturbation se propage ensuite dans B , puis influence la dynamique d'un paquet d'onde situé dans C . L'interaction apparente entre les deux paquets d'onde n'est donc pas une action directe de l'un sur l'autre, mais la manifestation émergente d'une dynamique d'interaction entre champs.

Dans l'approximation continue, la dynamique des trois champs est décrite par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= c_A^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \Omega_A^2 A + g_{AB}(B - A) \\ \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= c_B^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \Omega_B^2 B + g_{AB}(A - B) + g_{BC}(C - B) \\ \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} &= c_C^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \Omega_C^2 C + g_{BC}(B - C)\end{aligned}$$

Interprétation mécanique des différents termes

Chaque terme de ces équations possède une interprétation mécanique simple.

Le terme

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

provient des ressorts reliant chaque masse à ses voisines le long de la chaîne. C'est ce terme qui permet la propagation des perturbations le long du champ sous forme d'ondes.

Le terme

$$-\Omega^2 A$$

représente un rappel local vers la position d'équilibre. Mécaniquement, il correspond à un ressort reliant chaque masse à un support fixe. Dans l'analogie avec les champs physiques, ce terme joue le rôle d'un **terme de masse**.

Les termes de couplage entre champs proviennent des ressorts reliant les masses correspondantes des différentes chaînes. Par exemple, le terme

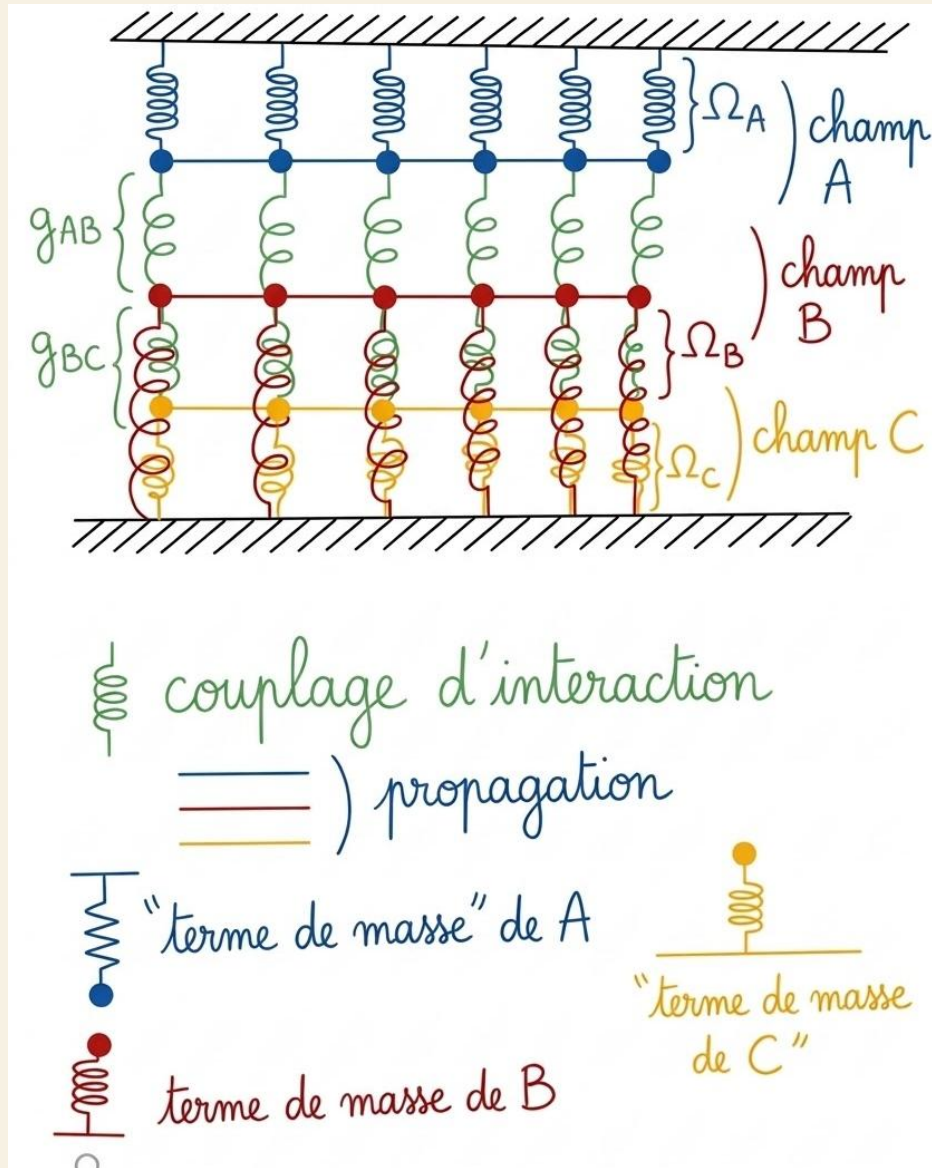
$$g_{AB}(B - A)$$

signifie que la masse appartenant à la chaîne A est reliée à la masse correspondante de la chaîne B . Le ressort de couplage exerce alors une force proportionnelle à la différence de déplacement entre les deux masses.

Ainsi :

- si $B > A$, le ressort tire A vers le haut ;
- si $A > B$, il tire A vers le bas.

Le même raisonnement vaut pour le couplage entre B et C .



Réécriture des équations

Il est instructif de développer les termes de couplage.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= c_A^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \Omega_A^2 A + g_{AB} B - g_{AB} A \\ \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= c_B^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \Omega_B^2 B + g_{AB} A - g_{AB} B + g_{BC} C - g_{BC} B \\ \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} &= c_C^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \Omega_C^2 C + g_{BC} B - g_{BC} C\end{aligned}$$

En regroupant les termes proportionnels aux champs eux-mêmes, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= c_A^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - (\Omega_A^2 + g_{AB}) A + g_{AB} B \\ \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= c_B^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - (\Omega_B^2 + g_{AB} + g_{BC}) B + g_{AB} A + g_{BC} C\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = c_C^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - (\Omega_C^2 + g_{BC})C + g_{BC}B$$

Apparition des masses effectives

Cette réécriture montre un point important : les ressorts de couplage ne produisent pas uniquement une interaction entre champs. Ils modifient également les termes de rappel local.

On peut alors définir des **masses effectives renormalisées** :

$$\begin{aligned}\Omega_{A,eff}^2 &= \Omega_A^2 + g_{AB} \\ \Omega_{B,eff}^2 &= \Omega_B^2 + g_{AB} + g_{BC} \\ \Omega_{C,eff}^2 &= \Omega_C^2 + g_{BC}\end{aligned}$$

Les équations deviennent alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= c_A^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \Omega_{A,eff}^2 A + g_{AB}B \\ \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= c_B^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \Omega_{B,eff}^2 B + g_{AB}A + g_{BC}C \\ \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} &= c_C^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \Omega_{C,eff}^2 C + g_{BC}B\end{aligned}$$

Interprétation : une première forme de renormalisation

On voit donc apparaître un phénomène important : l'introduction des interactions modifie les paramètres effectifs du système.

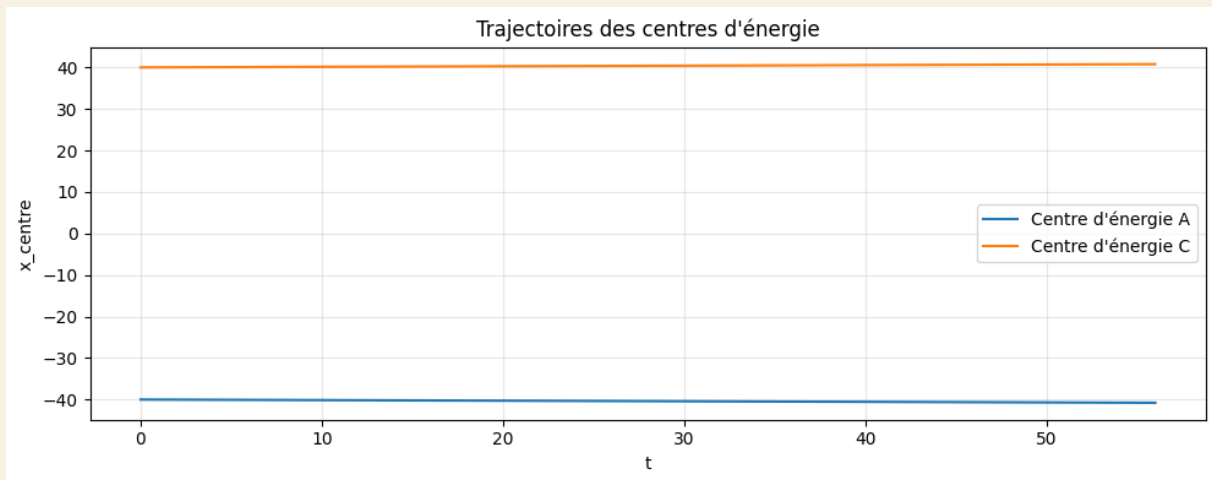
Les ressorts reliant les différentes chaînes ne produisent pas seulement une influence entre champs. Ils modifient également la raideur effective ressentie par chaque champ. Autrement dit, les masses physiques observées dans les équations du mouvement ne correspondent plus aux masses physiques « nues » qu'aurait chaque champ s'il n'était pas couplé aux autres.

Ce phénomène constitue une version très simple de ce que l'on appelle, dans les théories de champs plus élaborées, une **renormalisation des paramètres** : les interactions modifient les valeurs effectives des constantes apparaissant dans les équations dynamiques.

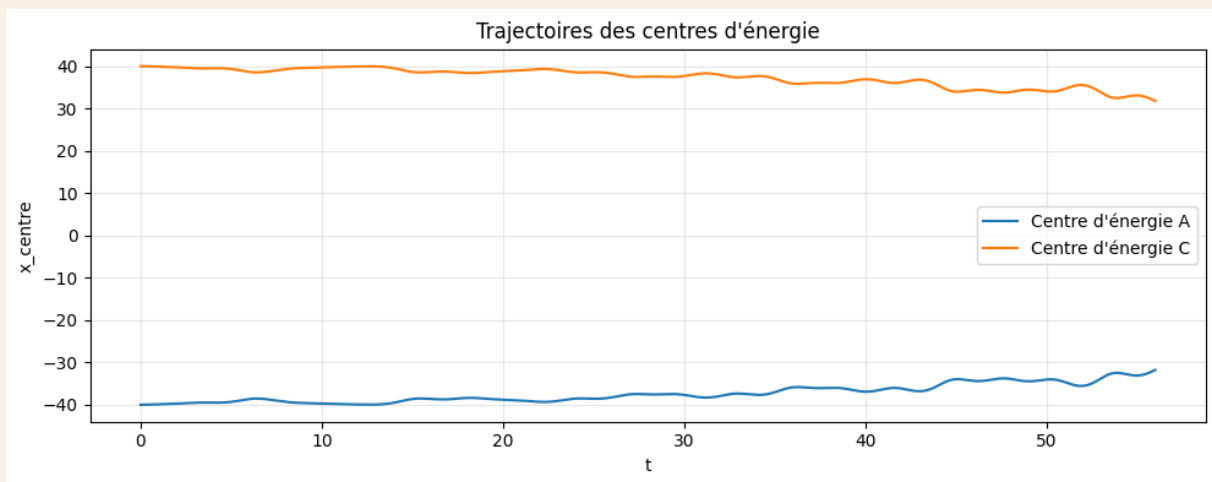
Dans le modèle mécanique considéré ici, ce mécanisme apparaît déjà de manière transparente, sans aucune difficulté mathématique particulière.

Simulation et limite du modèle

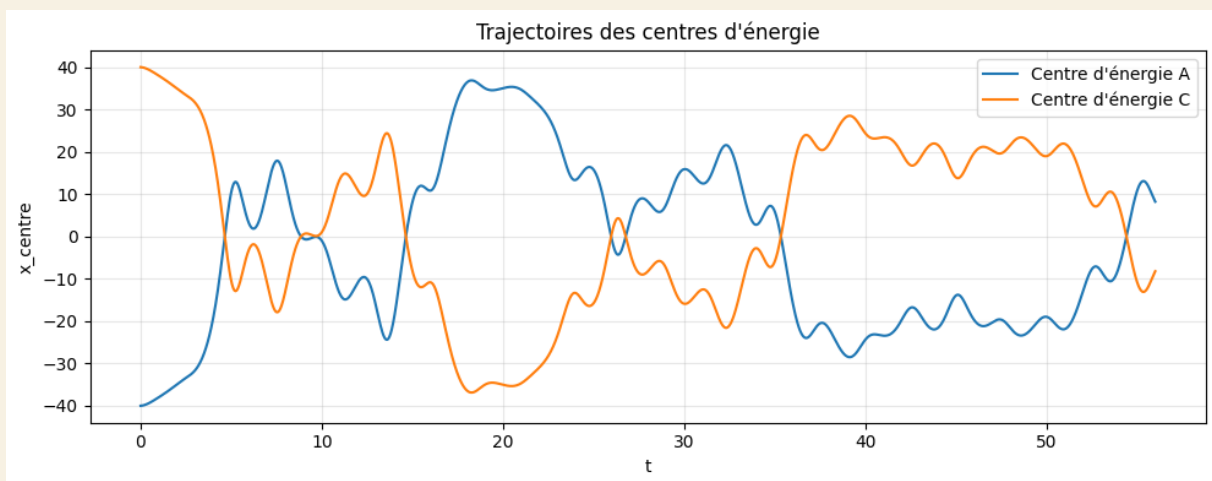
Testons ce modèle en faisant une simulation numérique. Nous choisissons les conditions initiales des champs A et C avec un paquet d'onde par champ, distant d'une certaine longueur, et ayant tous les deux une vitesse de groupe nulle. Le champ B est paramétré avec un fort coefficient de propagation. Nous lui attribuons pour le moment un paramètre de masse nul. Nous suivons tout d'abord la trajectoire des centres d'énergie des champs A et C lorsque les coefficients de couplage avec B sont nuls.



Les centres d'énergie restent parfaitement immobiles : il n'y a aucune interaction entre les champs A et C comme nous pouvions nous y attendre. Actionnons désormais le couplage en le réglant sur une faible valeur :

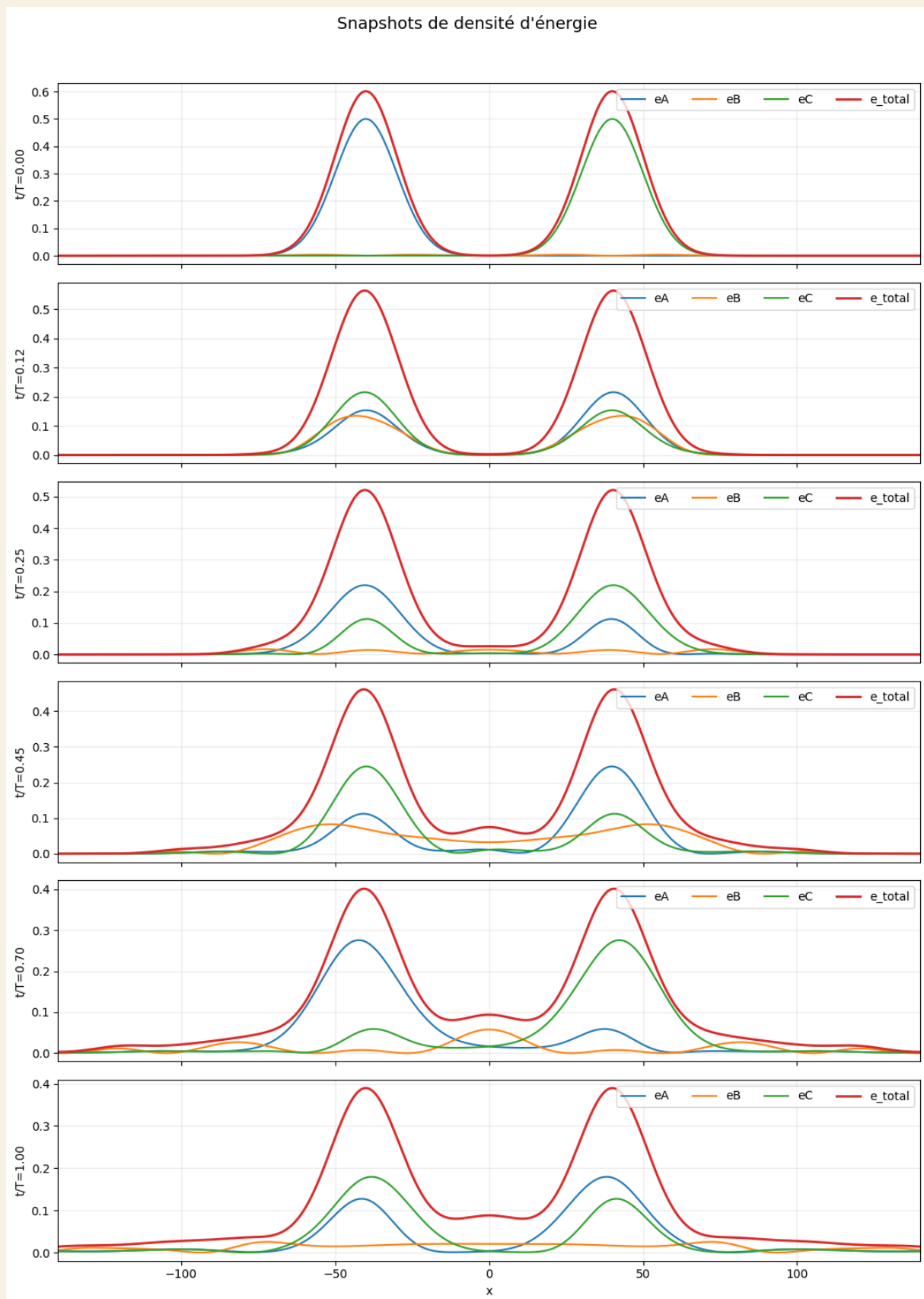


Nous nous apercevons que les centres d'énergie se rapprochent lentement. B semble médier une interaction attractive entre le centre d'énergie des deux champs. Nous augmentons désormais le couplage :



Augmenter le couplage permet donc une plus grande interaction entre les deux centres d'énergie. **Cependant, cette image est extrêmement trompeuse.** Les deux centres d'énergie n'interagissent en réalité pas ! Si on regarde plus précisément la dynamique du système, on s'aperçoit que les centres

des paquets d'onde sont immobiles. Les paquets d'onde disparaissent et se régénèrent sur deux sites et c'est ce phénomène qui est responsable du mouvement des centres d'énergie.



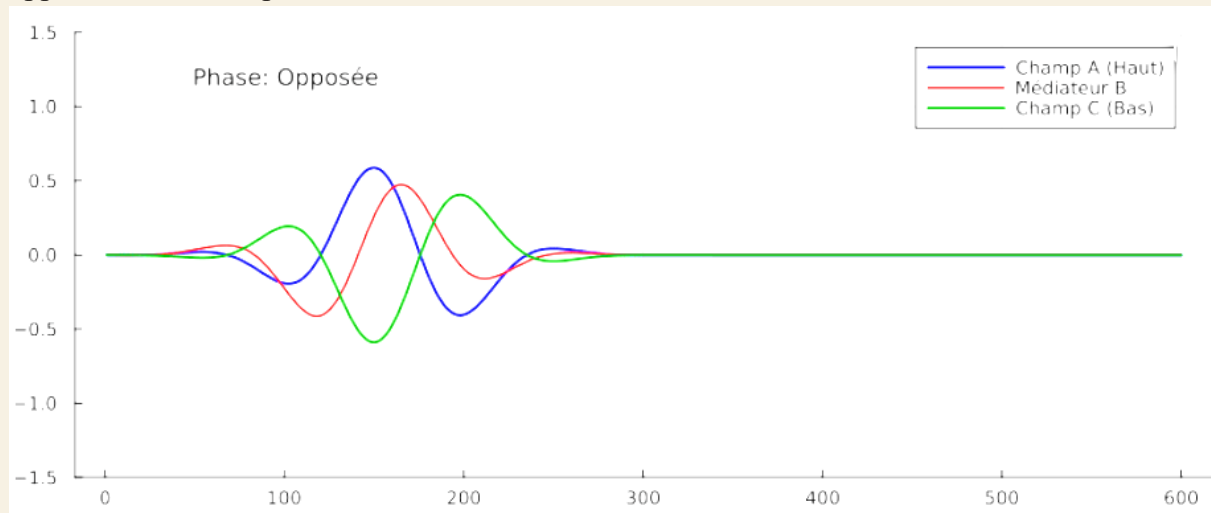
Nous ne sommes pas sur une dynamique entre deux quasi-particules qui exercent une force mutuelle. Si on veut conserver un langage particulière, ce phénomène ne mime pas un processus de médiation

d'une force effective entre deux particules, mais plutôt un processus de création et d'annihilation de particules.

L'excitation de A sur le site de gauche transmet petit à petit son énergie, par l'intermédiaire de B, à C et crée ainsi une excitation de C sur le même site. Un processus symétrique et inverse se déroule sur le site de droite. Comme le processus de transfert de l'énergie ne se fait pas instantanément, le centre d'énergie des deux champs semble effectuer une trajectoire un peu erratique autour du centre d'énergie totale du système. Mais les flux énergétiques se font d'un champ à l'autre, et non pas dans l'espace horizontal des x .

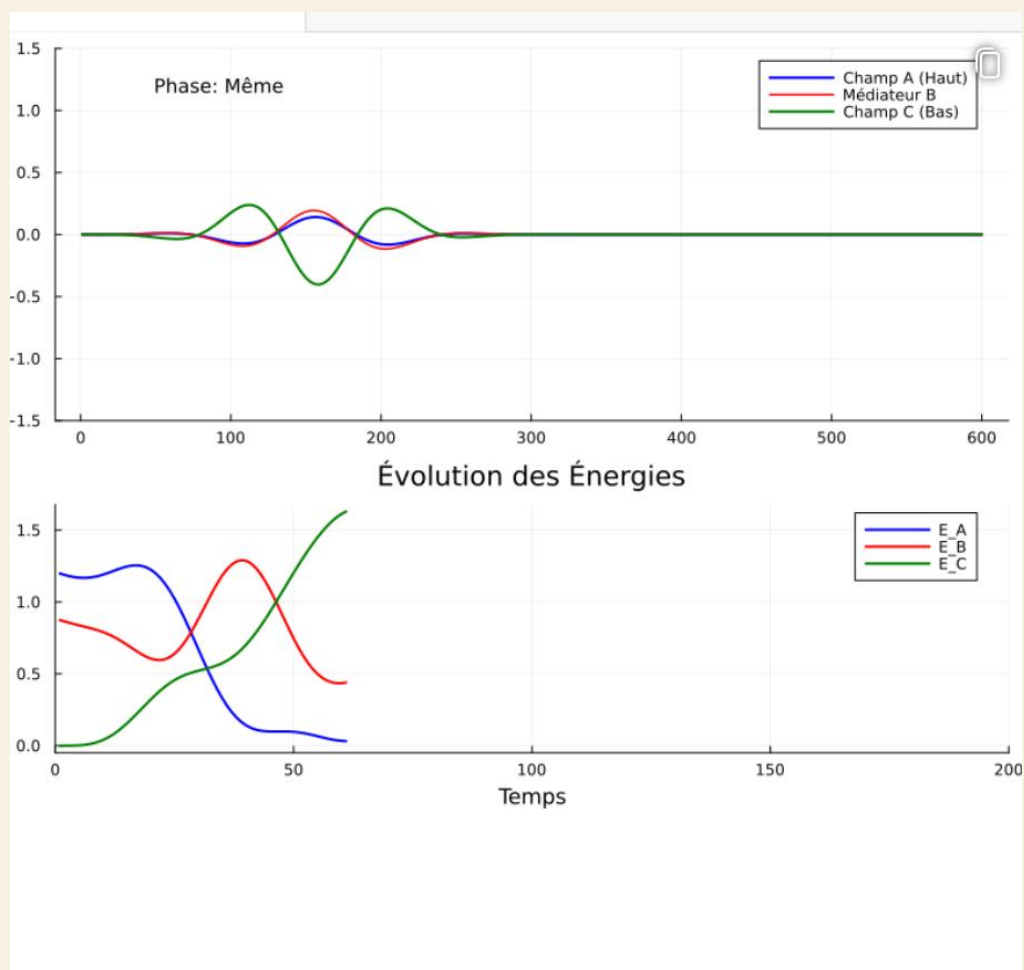
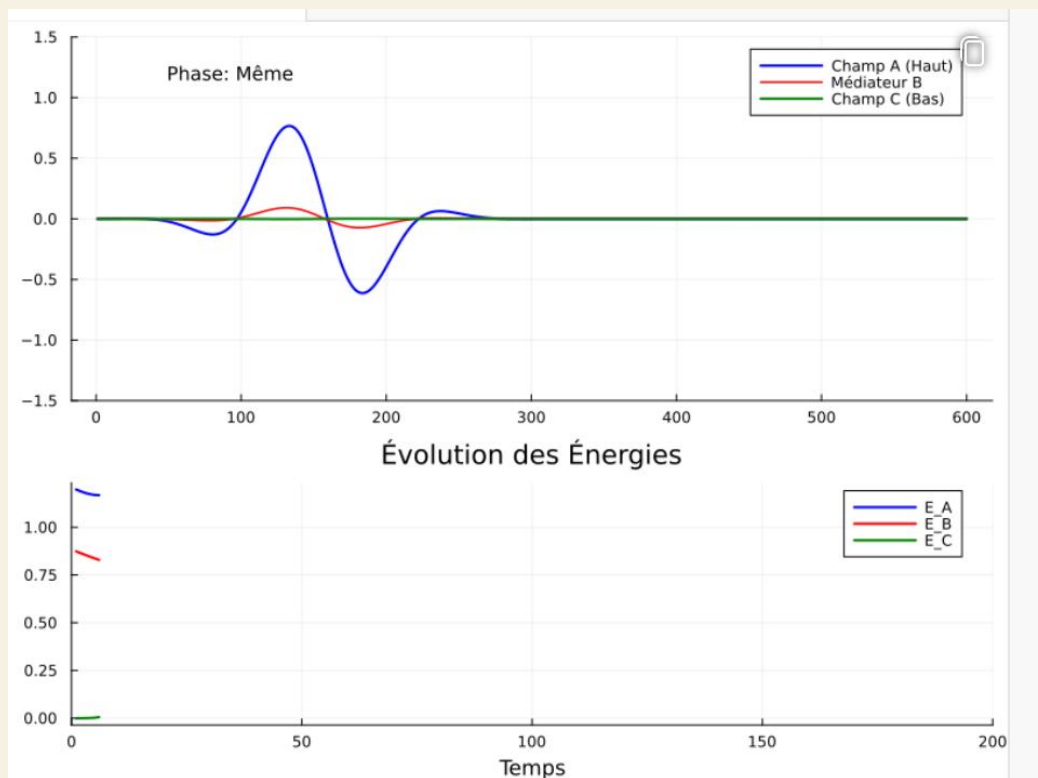
Le vrai intérêt du modèle

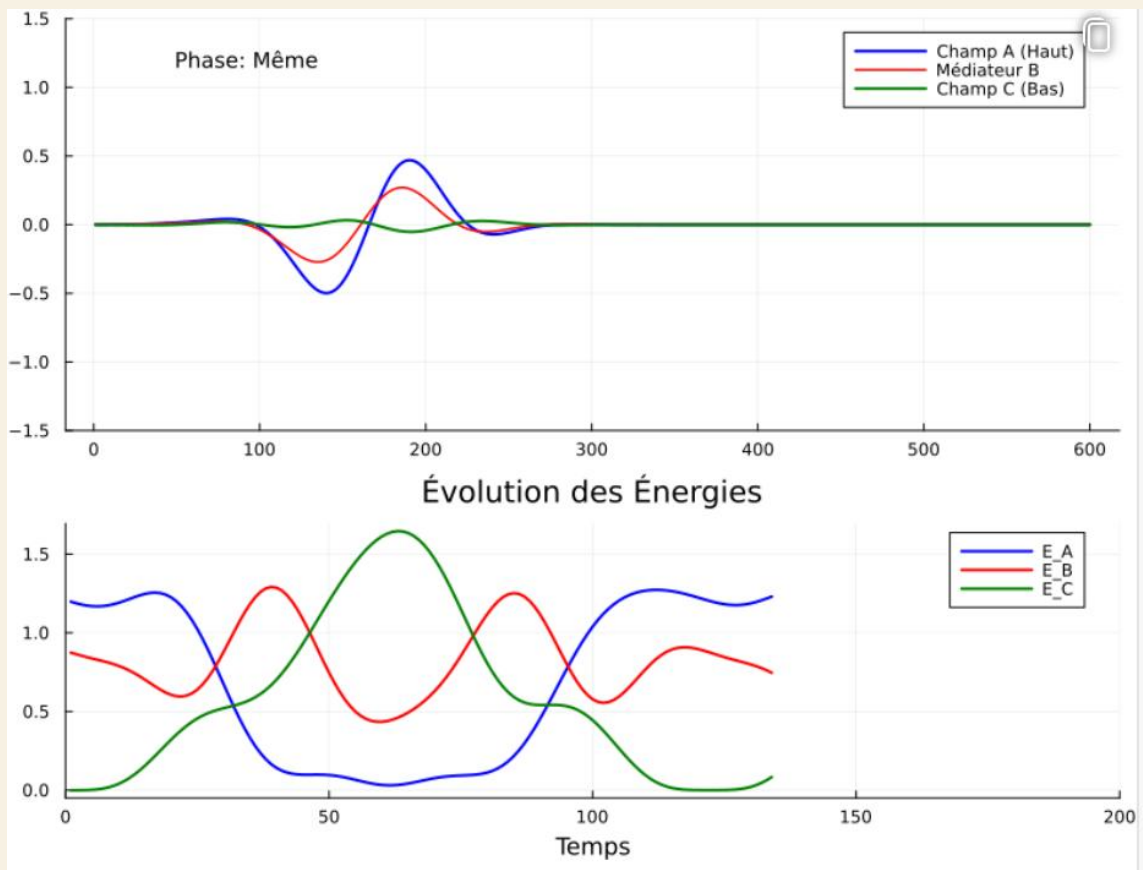
Ce modèle avait surtout pour objectif d'illustrer de manière intuitive ce que sont les interactions entre particules dans le cadre de la théorie des champs : des échanges d'énergie entre champs couplés. Mais ce modèle mécanique particulier ne reproduit pas d'interactions entre particules comme on peut le voir en mécanique newtonienne. En revanche il peut nous offrir un aperçu d'un phénomène réel dans le monde de la physique des particules : l'oscillation de certaines particules entre deux états. Certains mésons neutres, ainsi que les neutrinos, oscillent entre plusieurs états. Pour prendre un exemple concret, le méson K_0 existe dans la nature sous deux formes : le kaon K_{0S} et le kaon K_{0L} . Les deux formes du Kaon sont elles-mêmes des superpositions entre une particule et son antiparticule. Il ne s'agit pas de particules élémentaires, mais dans le cadre des théories de champs effectifs, chacune de ces particules peut être modélisée par un champ différent. Notre modèle peut donner une version simplifiée de la physique du kaon. On peut par exemple faire correspondre le champ A à une particule, et le champ C à son antiparticule. La forme du kaon K_{0S} correspond alors à un état dans lequel un paquet d'onde est présent dans le champ A, un autre dans le champ C, avec les deux vibrant en opposition de phase. Dans ce cas-là, le médiateur est fortement sollicité.



Le kaon K_{0L} correspond à une situation dans laquelle un paquet est présent dans A, un autre dans C, et les deux vibrant cette fois en phase. Dans ce cas-là, le champ médiateur n'est pas du tout sollicité, même s'il sert bien de médiateur entre les deux champs.

Si en revanche on commence par préparer un Kaon dans un état « pur », (par exemple, on prépare un paquet d'onde seulement dans le champ A au départ), les deux champs vont en permanence s'échanger de l'énergie, changeant le Kaon en son antiparticule et vice versa.





La particule passe ainsi son temps à changer « d'identité » ce qui peut paraître très étrange quand on regarde les choses d'un point de vue « particulière ». Mais si on regarde les choses du point de vue d'une théorie de champs, tout devient beaucoup plus naturel : il s'agit simplement de deux champs couplés qui s'échangent de l'énergie via un troisième champ médiateur. L'énergie disponible passe seulement son temps à faire des aller-retours entre les deux champs.

La physique du kaon est en réalité plus complexe, mais notre modèle nous en donne un aperçu qualitatif éclairant. Il illustre également quelque chose qu'il est fondamental de comprendre en physique des particules : le terme de force pour désigner les interactions n'est pas vraiment approprié. C'est notamment le cas pour l'interaction nucléaire faible. Cette dernière ne peut pas être représentée classiquement par deux particules qui exerceraient une force mutuelle par l'intermédiaire d'un champ. Fondamentalement, l'interaction concerne des champs entre eux. C'est seulement lorsque la dynamique des champs fait émerger des structures stables qui semblent exercer une accélération l'une sur l'autre que le terme de force est approprié.

Avant de passer à des couplages entre champs qui permettent de traiter des interactions entre particules plus générales, nous allons dans la prochaine section étudier un modèle mécanique encore plus simple. L'objectif sera de comprendre le rôle fondamental que joue le paramètre de masse dans les interactions, au-delà de son rôle purement inertiel que nous avons déjà examiné lors du précédent chapitre.

II.2 Deux nouveaux rôles pour la masse

Nous allons prendre cette fois un modèle mécanique avec lequel nous sommes déjà familier : simplement une série de ressorts couplés qui obéissent à l'équation de Klein-Gordon à la limite continue.

Nous allons simplement y ajouter deux éléments : un ressort sera couplé à un « moteur » qui transmettra donc de l'énergie au champ. Et un autre ressort sera relié à un « capteur » qui mesurera l'énergie reçue par ce ressort.

Le champ ici sert donc en quelque sorte d'intermédiaire entre le « moteur » et le « capteur ». C'est un champ médiateur. Nous allons explorer deux aspects de la masse qui jouent des rôles fondamentaux en théorie des champs (y compris en théorie quantique des champs) : la masse comme principal facteur de portée d'une interaction et la masse comme « seuil d'entrée énergétique à payer » pour exciter un champ. Deux situations différentes seront examinées : l'une statique (qui illustrera le premier aspect) et l'autre dynamique (qui illustrera le second).

Propriété statique de la masse : la masse détermine la portée d'interaction d'un champ médiateur

Dans cette première situation, le moteur se contente de tirer son ressort (disons, le ressort situé en $x=0$) et de le maintenir à une certaine amplitude. Le ressort, à son tour, tire ses voisins dans le même sens. Mais la force transmise diminue petit à petit. Si on fait le bilan des forces pour un ressort donné (hors le ressort tiré par le moteur), nous avons à l'équilibre l'équation suivante :

$$c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \Omega^2 A = 0$$

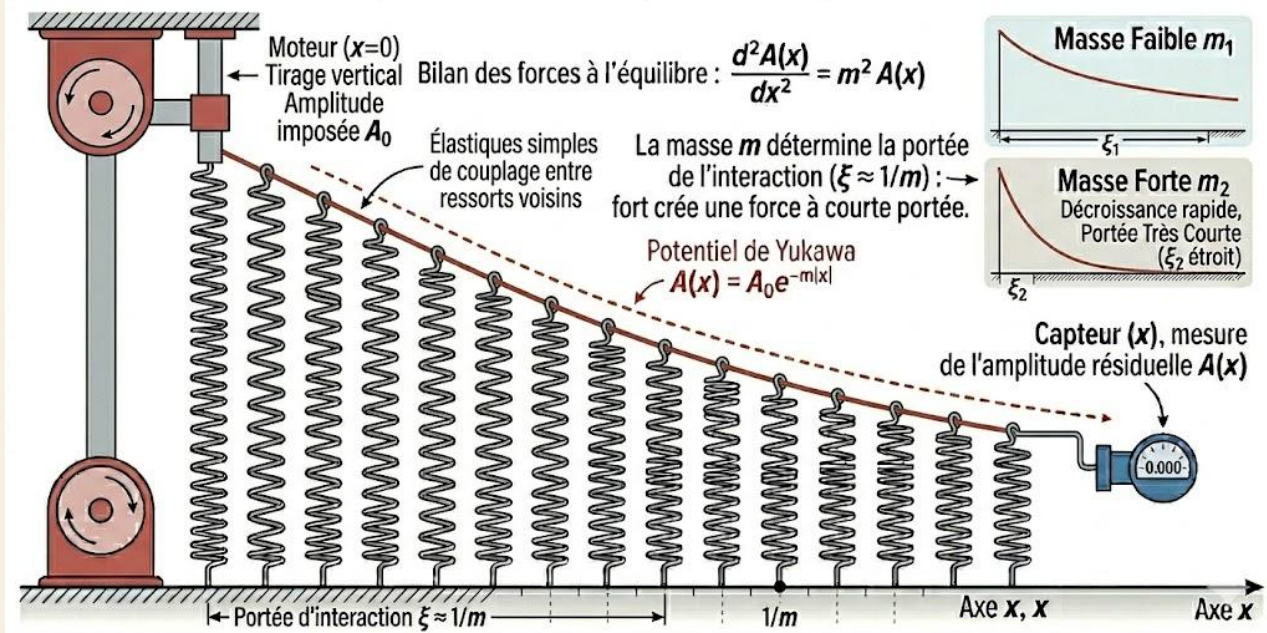
La solution générale d'une telle équation est de la forme :

$$A(x) = B e^{-\frac{\Omega}{c}x} + C e^{\frac{\Omega}{c}x}$$

Comme nous avons convenu que le ressort était tiré à $x=0$, cela veut dire que son amplitude maximale est atteinte à ce point. Dans ce cas, la valeur de l'amplitude ne dépend que de la distance à $x=0$, soit $|x|$ et est strictement décroissante par rapport à cette distance ; nous obtenons donc :

$$A(x) = B e^{-\frac{\Omega}{c}|x|}$$

Illustration Simplifiée : Modèle Statique d'un Champ Médiateur de Masse



Le détecteur situé en x mesure donc un signal qui diminue exponentiellement, et cette décroissance est donc « pilotée » par le facteur de masse du champ Ω . La forme $A(x)$ que nous venons de dériver est la forme standard d'un potentiel qui est généré par un champ médiateur de masse Ω . C'est ce qu'on appelle un potentiel de Yukawa.

L'approche par champ rend l'interprétation de cette forme de potentiel plus intuitive et moins mystérieuse que l'approche par particule. En effet, en termes de particules, le terme de l'exponentiel est interprété comme représentant la propagation d'une particule virtuelle de masse Ω , et on ne peut pas prétendre comprendre cette explication sans avoir plongé dans les techniques des graphes de Feynman de la théorie quantique des champs.

En termes de champ, l'explication est immédiate : le paramètre Ω correspond, on le rappelle, à un coefficient de rappel du champ vers sa valeur nulle. Le Laplacien quant à lui représente une « force » qui tend à lisser le champ, c'est-à-dire à s'opposer à une courbure. L'équation d'équilibre que nous avons écrite correspond à l'équilibre entre ces deux forces. Près de $x=0$, le champ a une amplitude forte, la force de rappel est donc importante ; pour équilibrer cette force, la courbure du champ doit donc également être importante. Cette courbure décroît proportionnellement avec l'élongation des ressorts. Elle doit pour chaque point équilibrer une force de rappel qui diminue elle-même linéairement avec l'élongation du ressort. La courbure est donc forte proche de $x=0$, mais diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de $x=0$ et que l'amplitude devient plus petite. D'où la forme exponentielle décroissante.

Dans le cas où la masse est nulle, la courbure est nulle : l'interaction peut se propager à l'infini. Les deux champs classiques détectables au niveau macroscopique, le champ gravitationnel et le champ électromagnétique, ont un terme de masse nul : c'est pour cela qu'ils se laissent détecter au niveau macroscopique.

La masse comme prix énergétique d'entrée.

Nous allons maintenant rendre le moteur plus actif. Le moteur stimule son ressort de manière périodique. Notre équation, hors du ressort qui est attaché au moteur, est :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \Omega^2 A$$

Nous attendons que le régime se stabilise, ce qui peut prendre un peu de temps. Lorsque cela est fait, nous avons un régime stationnaire, c'est-à-dire que nous avons une fréquence constante. Notre solution peut alors se mettre sous la forme :

$$A(x, t) = \alpha(x) e^{i\omega t}$$

En injectant la solution dans l'équation, et en réorganisant un peu, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \alpha(x)}{\partial x^2} = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{c^2} \alpha(x)$$

Il vaut la peine de s'arrêter sur ce résultat. La forme des solutions de cette équation dépend du signe du coefficient $\sigma^2 = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{c^2}$. Si $\omega < \Omega$, alors la solution $\alpha(x)$ est de la forme

$$\alpha(x) = \alpha_0 e^{-\sigma x}$$

Autrement dit, l'amplitude de l'onde décroît exponentiellement dans l'espace. C'est ce qu'on appelle une onde évanescence. Physiquement, le moteur n'introduit pas assez d'énergie pour exciter un mode propre du champ. On peut le dire autrement. La fréquence de résonance de chaque ressort est Ω . Tant qu'on ne stimule pas le champ à sa fréquence de résonance, alors une partie de la force de stimulation ne fournit pas de travail car la stimulation n'est pas en phase avec la force de rappel des ressorts. L'énergie du moteur n'est pas efficacement transférée au réseau de ressorts. Si on dérive la relation de dispersion : $\omega^2 = c^2 k^2 + \Omega^2$.

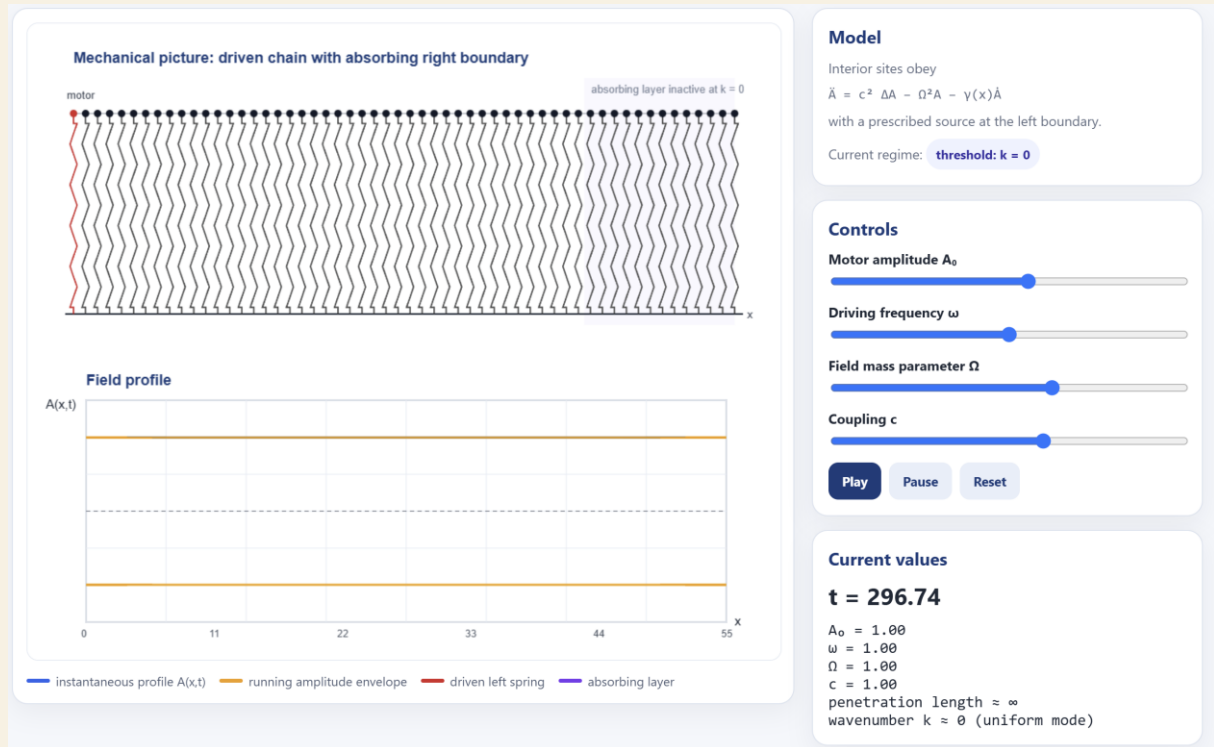
On se rend compte que $k=i\sigma$, autrement dit, le nombre d'onde est imaginaire !

Dans l'image ci-dessous, la fréquence est juste légèrement inférieure au seuil de masse ($\omega = 0.99 \Omega$), mais cela ne suffit pourtant pas à faire en sorte que les ondes se propagent. Le champ reste « collé » à la source.



À partir du moment où $\omega = \Omega$, se produit une résonance : le moteur stimule son ressort à sa fréquence propre. Lorsque l'on a des conditions aux limites appropriées, une fois le régime stationnaire atteint, la partie spatiale de la solution est de la forme $\alpha(x) = \alpha_0$, c'est-à-dire qu'elle ne varie pas dans l'espace. Tous les ressorts vont donc vibrer en phase. La relation de dispersion donne alors $k = 0$ et $\omega = \Omega$. Nous avons atteint une fréquence suffisante pour créer des particules au repos !

Dans la simulation, il faut cependant enlever la couche absorbante à droite pour parvenir à ce régime.



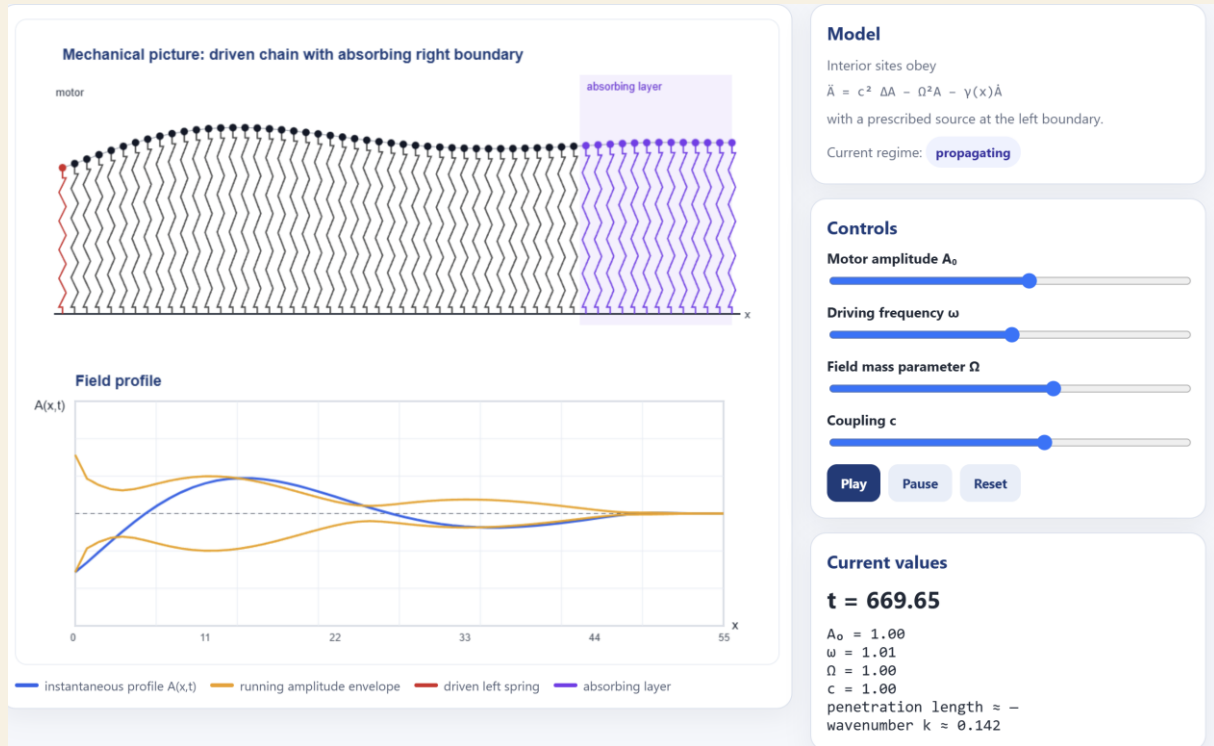
Maintenant, lorsque $\omega > \Omega$, nous pourrions penser que nous sommes sortis de la fréquence de résonance. Mais c'est sans compter sur la force induite par le terme du Laplacien, qui va ajuster la fréquence de résonance des ressorts pour la faire correspondre précisément à ω . La partie spatiale de la solution sera alors :

$$\alpha(x) = \alpha_0 \cos(kx)$$

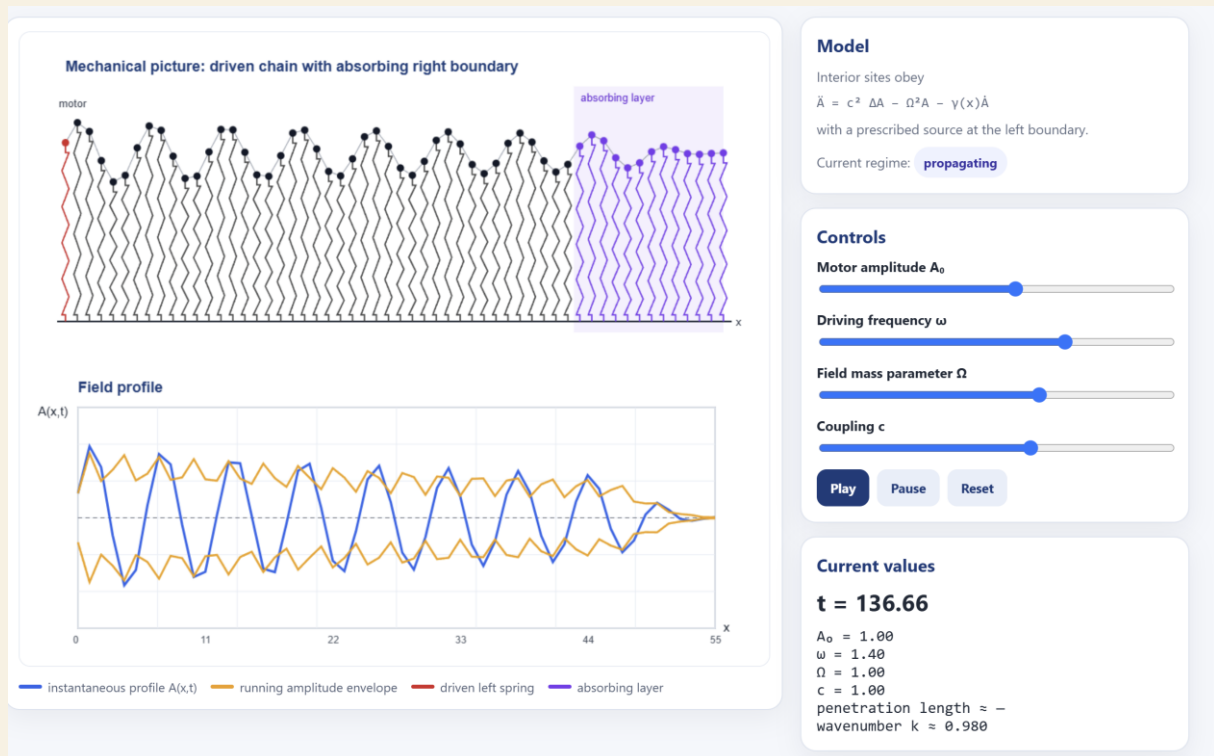
Et nous avons donc une onde progressive qui respecte la relation de dispersion :

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \Omega^2$$

Ci-dessous, $\omega = 1.01 \Omega$



Ci-dessous, $\omega = 1.4 \Omega$



Nous voyons donc que plus nous augmentons la fréquence de stimulation, plus les ondes générées ont un nombre d'onde important.

Pour profiter de l'animation, rendez-vous [sur la page de présentation de l'article](#).

Interprétation particulière

Nous avons déjà abordé le lien entre la relation de dispersion des ondes et la relation de l'énergie d'une particule relativiste. Une onde dont la fréquence ω vérifie la relation $\omega^2 = c^2 k^2 + \Omega^2$

correspond à une particule d'énergie proportionnelle à ω , d'impulsion proportionnelle à k et de masse proportionnelle à Ω . En termes particuliers, ces deux régimes du champ correspondent à des situations bien précises :

- Si $\omega < \Omega$:

Le moteur ne fournit pas assez d'énergie pour permettre la création de particules réelles. Comme nous l'avons vu, le nombre d'onde, donc l'impulsion, est imaginaire. Il n'existe alors pas de mode propagatif réel vérifiant la relation de dispersion $\omega^2 = c^2 k^2 + \Omega^2$.

On dit que la particule n'est pas sur « sa couche de masse ». Nous sommes typiquement dans le cas où le champ médiateur ne rayonne pas mais peut exercer une attraction ou une répulsion qui est souvent présentée dans la vulgarisation comme résultant d'échanges de « particules virtuelles ». Mais on voit qu'une interprétation en termes de champs est beaucoup moins mystérieuse ici. Il s'agit juste du fait que la fréquence de la stimulation n'a pas atteint la fréquence propre du champ.

- Si $\omega \geq \Omega$:

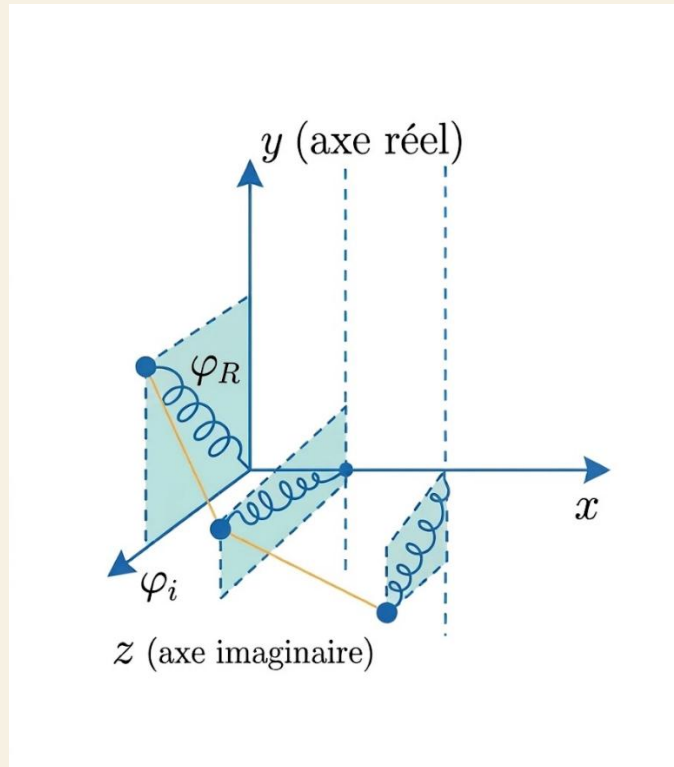
Le moteur fournit suffisamment d'énergie pour permettre la création de particules réelles qui respectent la relation relativiste de l'énergie. Les particules prennent leur indépendance par rapport à la source et peuvent donc se propager librement. Pour exciter le champ de manière durable, il faut donc exciter le champ avec une fréquence qui correspond au minimum à sa masse propre.

II.3 Un modèle mécanique de champ chargé

Jusqu'à maintenant, nous avons uniquement considéré des champs mécaniques réels. En physique, les champs réels correspondent à des particules non chargées, tandis que des champs complexes correspondent à des particules chargées. Le terme de charge ici est à comprendre de manière générique. La charge en question n'est à identifier avec la charge électrique qu'en cas de couplage avec un champ électromagnétique.

Il est relativement facile de fabriquer un modèle entièrement mécanique de champ complexe. Il suffit d'introduire un degré de liberté supplémentaire au champ.

Prenons donc notre ressort. Celui-ci est fixé sur un site, mais contrairement au cas précédent, il peut se mouvoir dans un plan. Ce ressort doit être anisotrope, et la force qu'il exerce sur la masse accrochée à son extrémité ne dépend que de son amplitude. L'amplitude du ressort a donc deux composantes : une selon l'axe y , et l'autre selon l'axe z . Pour différencier le rôle de chaque axe spatial, nous alignons les ressorts selon l'axe x . Comme précédemment, chaque petite masse accrochée à son ressort est également attachée à des petits élastiques qui la lient à ses voisins immédiats. Nous pouvons ainsi décomposer ce modèle en deux champs : l'un qui correspond à l'amplitude selon l'axe y , l'autre selon l'axe z . Ces deux champs obéissent à l'équation de Klein-Gordon. Mathématiquement, ces deux équations de champs sont équivalentes à une équation de champ complexe. On peut donc modéliser le système par une équation de Klein-Gordon complexe, dont l'axe réel correspondrait par exemple à l'axe y , et l'axe imaginaire à l'axe z .



Le Lagrangien du champ de Klein-Gordon complexe est :

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \Omega^2 \phi^* \phi$$

Ce qui donne, grâce à l'équation d'Euler-Lagrange, l'équation de propagation habituelle du champ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Omega^2 \phi = 0$$

Le Lagrangien est parfaitement invariant sous une transformation de phase d'un angle constant α :

$$\phi \rightarrow e^{-i\alpha} \phi$$

$$\phi^* \rightarrow e^{i\alpha} \phi^*$$

Cela correspond à faire pivoter l'ensemble de l'onde autour de l'axe x , en mélangeant les composantes de l'axe réel (y) et imaginaire (z) d'un angle α sans changer l'amplitude totale du champ.

Selon le théorème de Noether, cette invariance continue dicte l'existence d'un **quadri-courant conservé** (j^μ) vérifiant l'équation de continuité $\frac{\partial j^0}{\partial t} + \frac{\partial j^1}{\partial x} = 0$:

$$j^0 = i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right)$$

$$j^1 = -ic^2 \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right)$$

En intégrant la densité spatiale de ce courant sur tout le volume, on obtient la **charge totale conservée** (Q) :

$$Q = \int j^0 dx = i \int \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) dx$$

Si on identifie ce que représentent les amplitudes dans notre modèle mécanique, on s'aperçoit que la charge représente... le moment cinétique des poids le long de l'axe x . En physique des champs, les

axes y et z constituent un espace complexe abstrait, interne au champ, et la charge des champs correspond à un moment cinétique dans cet espace abstrait. Nous allons peu à peu nous éloigner des représentations mécaniques des champs pour rentrer de plus en plus dans l'abstraction, car nous arrivons à un moment où les analogies mécaniques perdent de plus en plus de leur pertinence et introduisent en réalité une complexité qui n'est pas nécessaire. Mais avant d'abandonner les modèles mécaniques, nous allons aborder quelque chose de très intéressant. Il existe deux types de solutions à l'équation complexe :

Tout d'abord :

$$\phi_+(x, t) = Ae^{-i(\omega t - k \cdot x)}$$

Cette solution correspond à des ressorts qui tournent à la fréquence ω dans le sens horaire autour du centre de leur site. En calculant la charge grâce à l'expression de la densité de charge j^0 , on trouve :

$$j^0 = 2\omega|A|^2$$

Cette solution correspond donc à une solution de charge positive.

(Voir l'image ci-dessous)



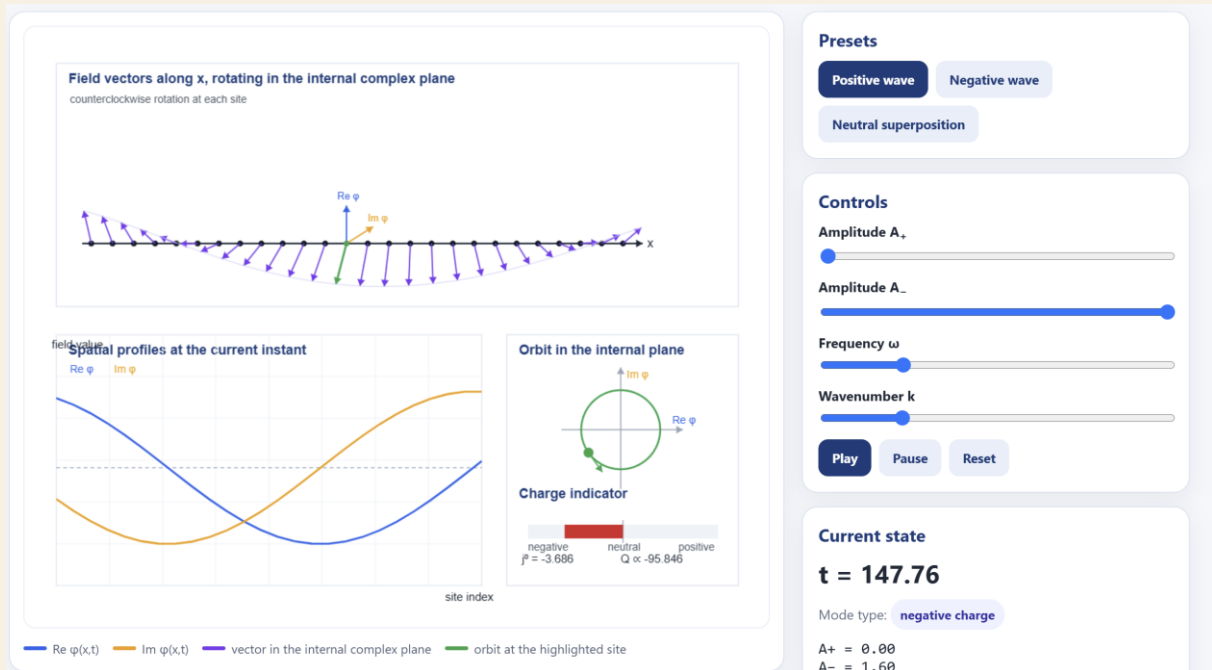
Mais il y a des solutions pour lesquelles les ressorts tournent dans l'autre sens :

$$\phi_-(x, t) = Ae^{+i(\omega t - k \cdot x)}$$

Et dont la densité de charge correspond à :

$$j^0 = -2\omega|A|^2$$

Cette solution correspond donc à une solution de charge négative.



Ainsi, un champ complexe possède deux sortes d'excitations qui ont des charges opposées. Ce sont ces deux types d'excitations qui, en théorie quantique des champs, correspondent à la matière et à l'antimatière.

Nous savons qu'une propriété de la matière et de l'antimatière est de s'annihiler. Qu'arrive-t-il si on superpose une solution positive avec une solution négative ?

Nous avons alors :

$$\phi(x, t) = Ae^{-i(\omega t - k \cdot x)} + Ae^{+i(\omega t - k \cdot x)}$$

Grâce à la formule d'Euler, cela se simplifie exactement en :

$$\phi = 2A \cos(\omega t - k \cdot x)$$

Autrement dit, la superposition d'une solution chargée négativement et d'une solution chargée positivement de même amplitude et de même fréquence crée une onde réelle.

On peut vérifier que sa charge est nulle. Les deux charges se sont donc neutralisées. Est-ce une annihilation ? Pas vraiment, car l'onde porte une énergie qui correspond à la somme des énergies des deux ondes. C'est simplement un mode neutre. Tant que le champ n'est pas couplé avec autre chose, il n'y a tout simplement pas d'endroit où l'énergie pourrait partir. Mais si le champ est couplé avec un autre champ, les modes neutres peuvent devenir des sources périodiques de ce champ. Il faut cependant que ces sources stimulent des fréquences supérieures ou égales au seuil du terme de masse. Un mode neutre peut donc devenir dans ce cas l'équivalent classique d'un positronium, c'est-à-dire un système lié composé d'un électron et d'un positron. Ce genre de système est très instable dans la nature. Dans le cas classique cependant, la désintégration n'est pas complète.

Vous pouvez vous amuser à créer des ondes de la charge qui vous chante avec [l'animation disponible sur la page de présentation de l'article](#).

II.4 Un premier modèle d'interaction réaliste entre deux champs

Dans ce qui suit, nous allons rassembler les morceaux de tout ce que nous venons de voir afin d'étudier des modèles réalistes de champs en interaction. Des comportements et des dynamiques qui commencent à ressembler à de la véritable physique des particules sont à portée de main !

Le premier modèle que nous considérons est l'interaction entre un champ de Klein-Gordon chargé couplé avec un champ de Klein Gordon réel. Nous avons déjà étudié l'interaction entre plusieurs champs de Klein-Gordon dans notre modèle de Sandwich de la partie II.1. Nous avons vu cependant que le couplage entre les champs n'était pas propice à établir une véritable dynamique de particules.

Le modèle que nous examinons dans cette partie est bien plus riche. Commençons à poser le Lagrangien du système.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_I$$

$$\mathcal{L} = \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \frac{\partial\psi}{\partial t} - c^2 \frac{\partial\psi^*}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} - \Omega_\psi^2 \psi^* \psi + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 - \Omega_\phi^2 \phi^2 \right] - g \psi^* \psi \phi$$

Voici le détail de chaque terme :

- **Le champ de "matière" complexe $\mathcal{L}_\psi$** : Il s'agit de la dynamique de Klein-Gordon pour un champ scalaire complexe de masse Ω_ψ . Nous venons d'étudier le comportement d'un tel champ dans la section précédente.
- **Le champ "médiateur" réel $\mathcal{L}_\phi$** . C'est la dynamique de Klein-Gordon pour un champ scalaire réel de masse Ω_ϕ . Nous avons déjà étudié un tel champ.
- **Le terme d'interaction $\mathcal{L}_I$** . C'est le terme de couplage. Le signe moins est une convention physique habituelle : ce terme agit comme une énergie potentielle d'interaction. La constante g représente la constante du couplage. Nous n'avons pas encore étudié un couplage de cette forme. Il faut prendre un peu le temps pour expliciter sa signification physique. Ce couplage joue le rôle d'une énergie potentielle d'interaction. Mais il ne s'agit plus d'un couplage de type « ressort-ressort ». Le couplage est linéaire en ϕ et quadratique en ψ . À noter qu'il y a une asymétrie dans les rôles que jouent les deux champs dans le couplage. Les deux champs ne vont donc pas jouer le même rôle l'un par rapport à l'autre.

Développons les équations d'Euler-Lagrange de ces deux champs. Les champs ψ et ψ^* ne sont pas indépendants. Comme ils sont complexes conjugués l'un de l'autre, on peut connaître l'un à partir de l'autre. Les vrais degrés de liberté sont les parties réelles d'un côté et les parties imaginaires de l'autre. Cependant, on peut montrer qu'il est possible de faciliter énormément les calculs tout en conservant la même physique en traitant ψ et ψ^* comme deux champs indépendants et en dérivant des équations d'Euler-Lagrange pour chacun d'entre eux. Voici donc les équations d'Euler-Lagrange pour ces champs :

Pour le champ ψ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \Omega_\psi^2 \psi = -g \phi \psi$$

Pour le champ ψ^* :

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \Omega_\psi^2 \psi^* = -g\phi \psi^*$$

Pour le champ ϕ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Omega_\phi^2 \phi = -g\psi^* \psi$$

Essayons d'analyser ces équations. Tout d'abord :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \Omega_\psi^2 \psi = -g\phi \psi$$

peut-être réarrangé ainsi :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (\Omega_\psi^2 + g\phi) \psi = 0$$

C'est exactement la forme d'une équation de Klein-Gordon libre pour un champ avec un terme de masse variable : $\Omega_{\text{eff}}^2 = \Omega_\psi^2 + g\phi$.

Cela veut dire que lorsque ϕ est positif, il « renforce » le terme de rappel Ω_ψ^2 et agit comme une « force » sur ψ qui tend à l'empêcher de prendre une grande amplitude. Par ailleurs, il augmente sa fréquence d'oscillation, et augmente le seuil de résonance : le champ ψ est donc plus difficile à exciter dans une zone à grand ϕ . Mais ϕ peut aussi prendre une valeur négative. Et dans ce cas, il rend au contraire le champ ψ moins rigide. Une chose alors remarquable se produit à partir du moment où

$$\Omega_\psi^2 + g\phi < 0.$$

Dans ce cas, la masse effective Ω_{eff} devient imaginaire ! La « force de rappel » tire alors dans le même sens que ψ et au lieu de le faire osciller autour de sa valeur d'équilibre, elle tend à l'augmenter indéfiniment. C'est ce qu'on appelle un régime tachyonique. Il est possible que certains champs aient subi un tel régime pendant l'inflation cosmique aux débuts de notre univers. Dans le monde réel, comme les champs sont couplés à d'autres champs, ce régime ne dure pas car les champs concernés transmettent rapidement leur énergie à d'autres champs.

Maintenant, insérons une solution de la forme :

$$\psi(t, x) = R(t, x) e^{iS(t, x)}$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire et en réarrangeant un peu les équations, on obtient pour la partie imaginaire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(R^2 \frac{\partial S}{\partial t} \right) - c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(R^2 \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0$$

Nous reviendrons bientôt sur la signification physique de cette équation. En ce qui concerne la partie réelle, on peut obtenir :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = \Omega_\psi^2 + g\phi + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right)$$

Cette équation a la forme d'une équation de Hamilton-Jacobi relativiste. Si on pose $E = -\frac{\partial S}{\partial t}$ et $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, l'équation devient $E^2 = c^2 p^2 + \Omega_\psi^2 + g\phi + Q$, avec $Q = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right)$. Bien que, pour le

moment, nous soyons dans une approche classique des champs, le terme Q est parfois appelé le « potentiel quantique », par référence à une certaine interprétation de la mécanique quantique, l'interprétation de de Broglie-Bohm de l'onde pilote. Dans le cas où ce terme reste suffisamment petit, l'équation de Hamilton-Jacobi nous fournit donc un aperçu de la dynamique d'un paquet d'onde. Comme une particule attirée vers les bas potentiels, notre paquet d'onde va subir une force effective vers les basses valeurs de ϕ .

En prenant le gradient de cette équation de Hamilton-Jacobi, on peut obtenir l'équivalent de l'équation d'Euler de la mécanique des fluides. En posant $v = \frac{c^2 p}{E}$, on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{2E} \frac{\partial}{\partial x} (g\phi + Q)$$

qui nous dit que chaque élément infinitésimal d'une onde va subir une force égale à $-\frac{1}{2E} \frac{\partial}{\partial x} (g\phi + Q)$.

Revenons à notre équation $\frac{\partial}{\partial t} \left(R^2 \frac{\partial S}{\partial t} \right) - c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(R^2 \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0$.

En utilisant les substitutions $E = -\frac{\partial S}{\partial t}$, $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, $v = \frac{c^2 p}{E}$ et $\rho = ER^2$, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0$$

C'est l'équation de continuité, qui correspond en réalité à l'équation de conservation de la charge. ρ est proportionnelle à la densité de charge (voir le théorème de Noether plus haut).

En résumé, injecter notre solution dans l'équation nous donne deux équations : la partie réelle nous donne la dynamique de notre paquet d'onde, et la partie imaginaire nous donne l'équation de conservation de la charge.

Nous passons à l'équation du champ ϕ .

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Omega_\phi^2 \phi = -g\psi^* \psi$$

Pour cela, nous considérons provisoirement que la valeur de ψ est constante et nulle à part dans une région très réduite et que nous sommes dans une condition d'équilibre ($\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$). Cela correspond exactement au cas que nous avons étudié avec nos ressorts, lorsque nous tirions sur un seul ressort avec une force fixe, et que nous regardions l'allure générale du champ de ressort. Nous avons trouvé que $A(x) = Be^{-\frac{\Omega}{c}|x|}$.

Sauf qu'ici, avec le signe le champ $-$, le champ ψ « tire » sur le champ ϕ « vers le bas », c'est-à-dire vers des valeurs négatives de ϕ . À part cette différence de signe, si nous faisons le même raisonnement que précédemment, nous trouvons que :

$$\phi(x) = -\phi_0 e^{-\frac{\Omega_\phi}{c}|x|}$$

Où ϕ_0 est un nombre réel positif qui dépend de l'amplitude de la source ψ . Autrement dit, ψ « creuse » le champ $\phi(x)$ car $\psi^* \psi > 0$ (le module d'un nombre complexe est toujours positif).

Maintenant, regardons notre équation d'Euler :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{2E} \frac{\partial}{\partial x} (g\phi + Q)$$

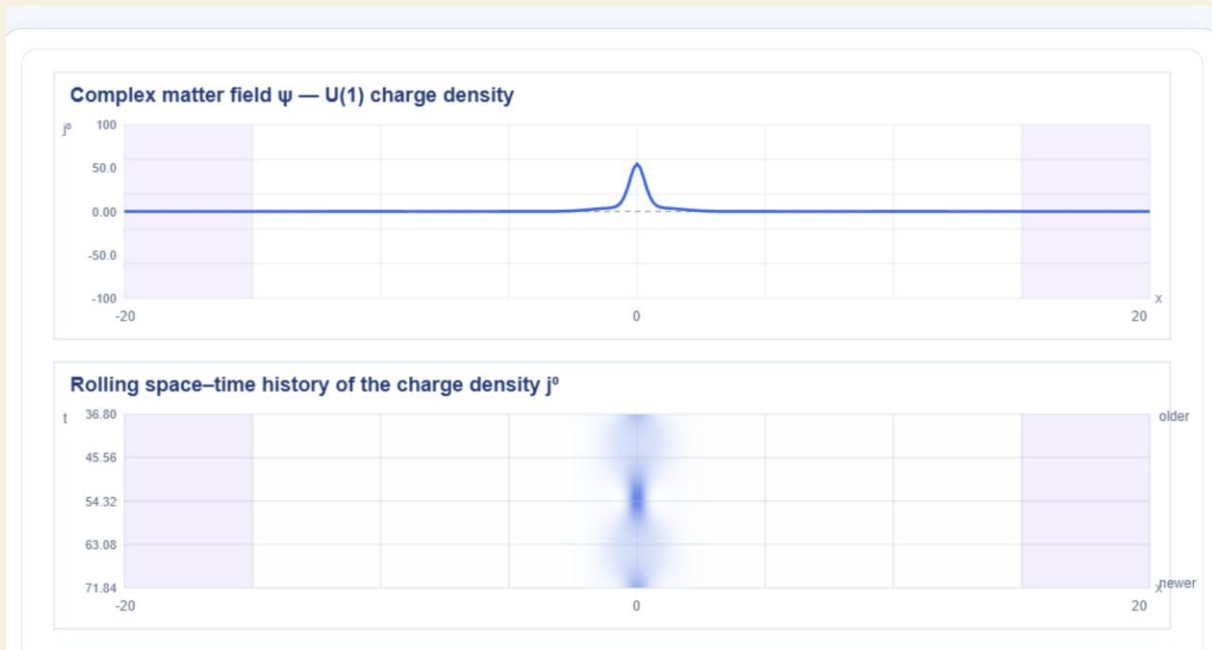
Si nous considérons une situation proche de la situation statique (un paquet d'onde immobile), nous avons :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$$

Et donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g\phi_0 e^{-\frac{\Omega\phi}{c}|x|} \right) \approx -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

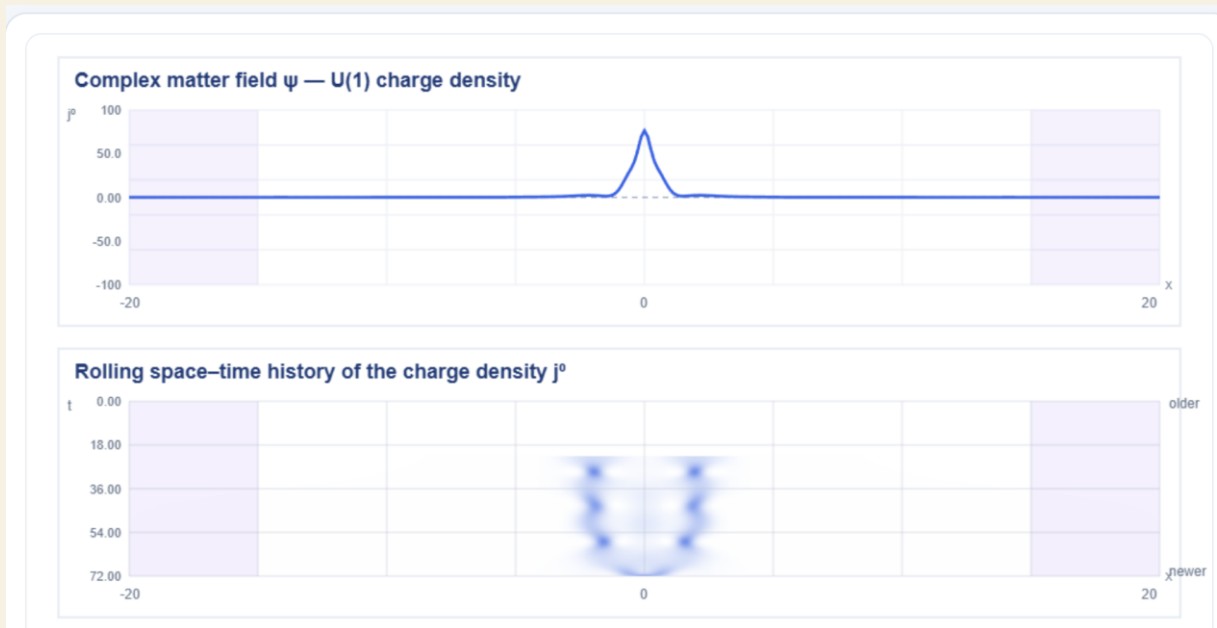
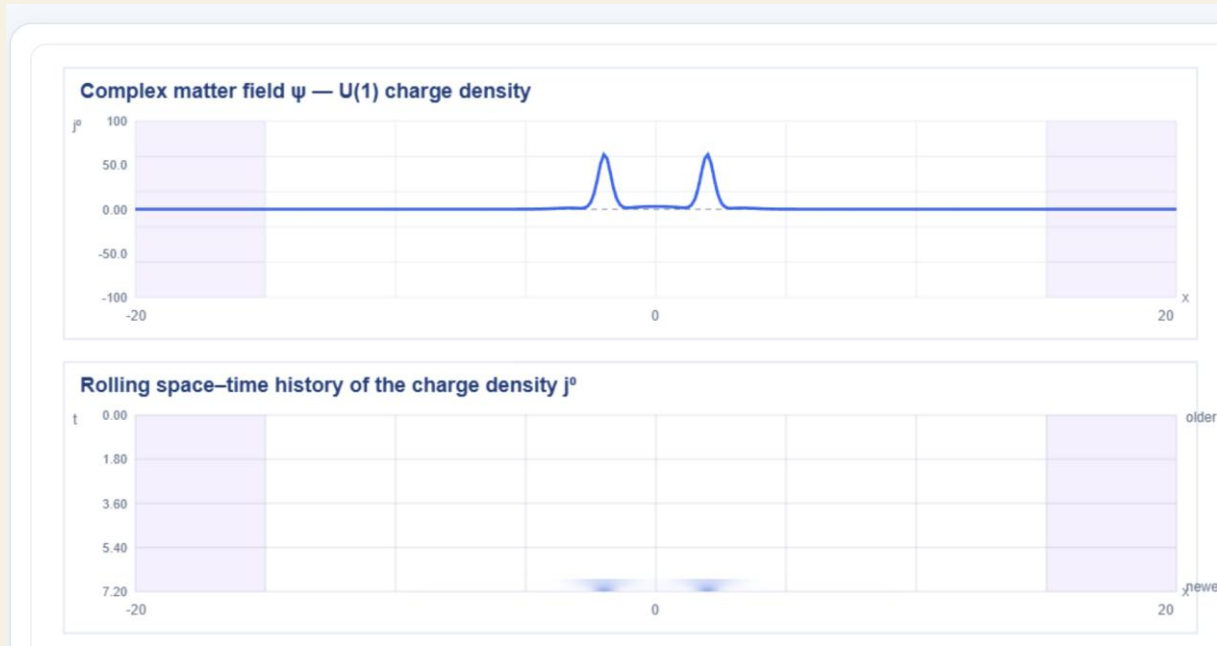
Cette équation traduit un équilibre qui se produit entre une force attractive liée au potentiel du champ ϕ et une force répulsive liée au potentiel quantique qui exerce une forme de pression interne au champ ψ . Le résultat est que les paquets d'onde ont tendance à se stabiliser en structures dont la largeur dépend entre autres de la masse du champ $\phi(x)$. Sans rentrer dans les détails, comme il y a rétroaction entre les deux champs, si le paquet d'onde devient trop large, alors la force attractive devient dominante et tend à le resserrer, et lorsqu'il devient trop étroit, la pression prend le dessus et le paquet d'onde de nouveau s'élargit. Le paquet d'onde donne alors l'impression de « respirer ». On nomme ce genre de paquet d'onde un « soliton » et c'est ce qui se rapproche le plus d'une véritable particule stable en physique classique des champs.

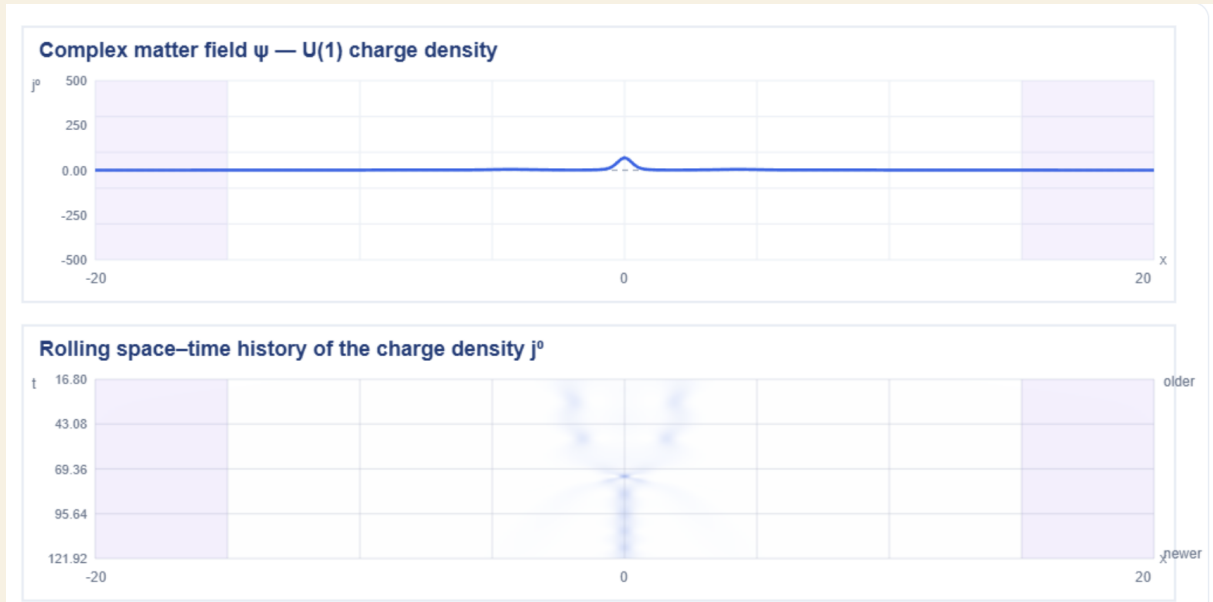


Dans l'image de cette animation, nous voyons dans la fenêtre haute la distribution de charge en un instant donné. Dans la fenêtre basse, nous voyons son évolution dans le temps : la charge se disperse et se recontracte à un rythme régulier. C'est la fameuse respiration du soliton. Vous pouvez vous amuser à créer votre soliton grâce à [l'animation disponible sur la page de présentation de l'article](#). Ne réglez pas la constante de couplage trop forte, sinon, c'est le GAME OVER : le régime tachyonique ! (L'animation s'arrête alors).

Par ailleurs, deux solitons exercent également l'un sur l'autre une force proportionnelle à $\frac{\partial}{\partial x} \left(g\phi_0 e^{-\frac{\Omega\phi}{c}r} \right)$, où r est la distance entre les deux solitons. Ce qui est intéressant est alors ce que produit une collision entre deux solitons. En réalité, cela dépend cette fois-ci de leur charge. Si les

deux solitons ont la même charge, la conservation de la charge empêchera les deux ondes de s'annihiler complètement. Si leur énergie cinétique initiale est inférieure à leur énergie potentielle d'interaction, les deux solitons vont fusionner.





Attention, dans ces trois images qui captent trois étapes du processus de fusion de deux solitons, la dernière image est trompeuse car on pourrait croire que le soliton final est minuscule par rapport aux deux solitons initiaux. La raison en est que l'échelle a changé : la taille du soliton final n'est donc pas plus petite, mais bien plus grande.

Cependant, le soliton ainsi créé relaxe ensuite l'énergie cinétique des deux solitons parents sous forme de rayonnement de ϕ , à condition que le processus soit suffisamment violent pour exciter les modes de supérieurs ϕ à son seuil de masse. Effectivement, dans ce cas, si on prend l'équation :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Omega_\phi^2 \phi = -g\psi^*\psi$$

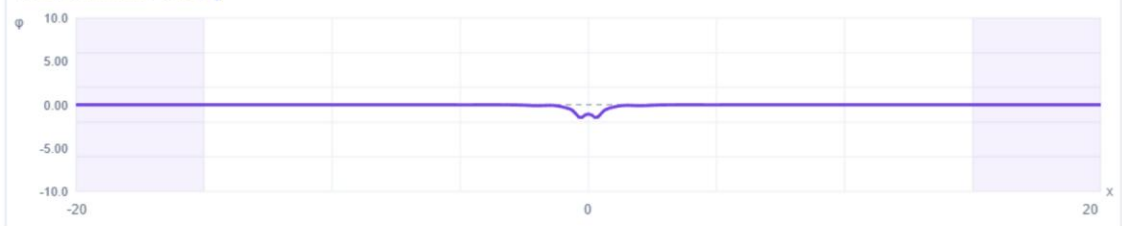
et si $\psi^*\psi$ évolue rapidement, alors nous avons l'équivalent d'un réseau de ressort que l'on agite violemment avec différentes fréquences. Les fréquences supérieures ou égales à Ω_ϕ rentrent en résonance avec le champ ϕ et provoquent donc un rayonnement.



Rolling space–time history of the charge density j^0

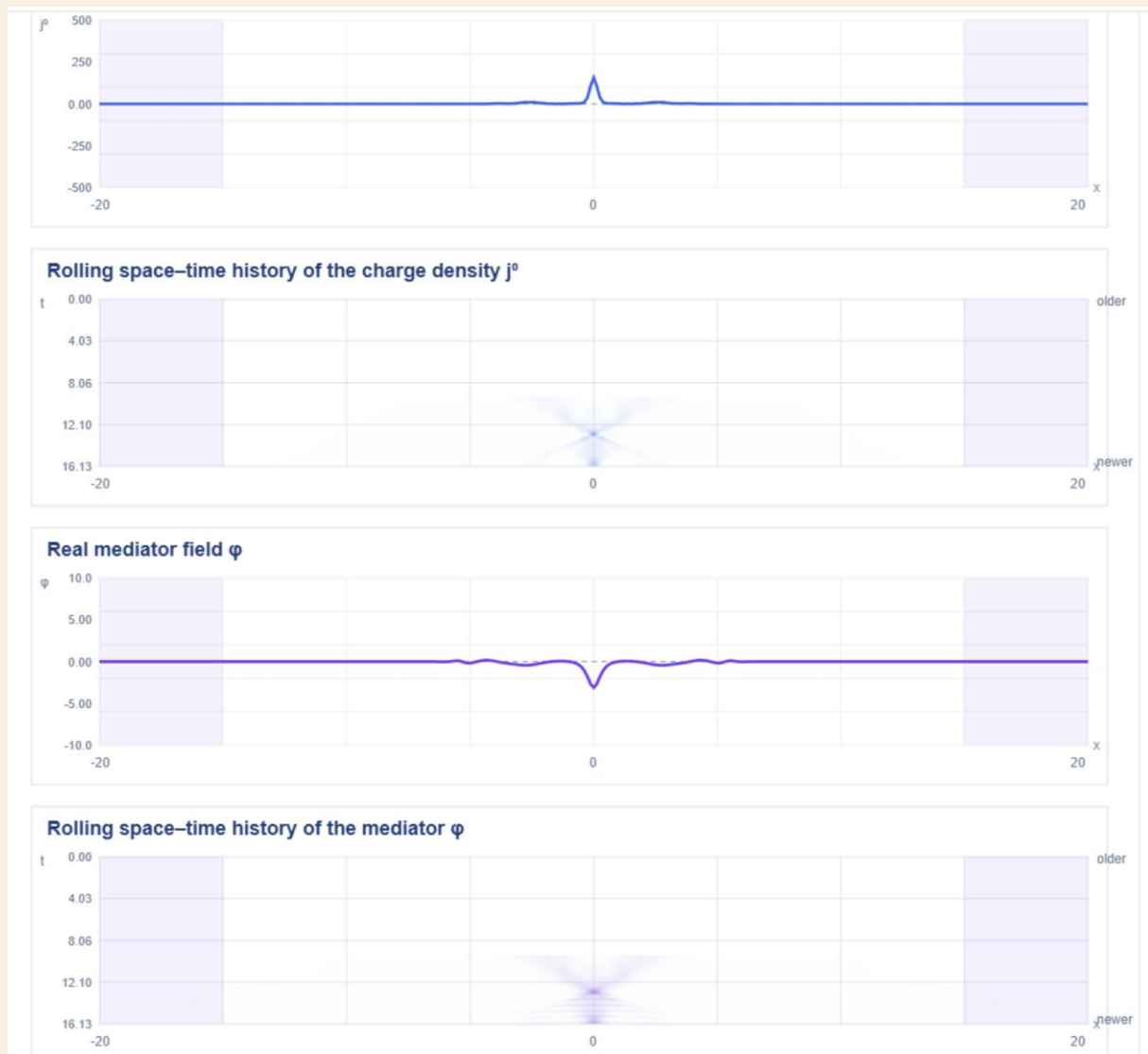


Real mediator field ϕ



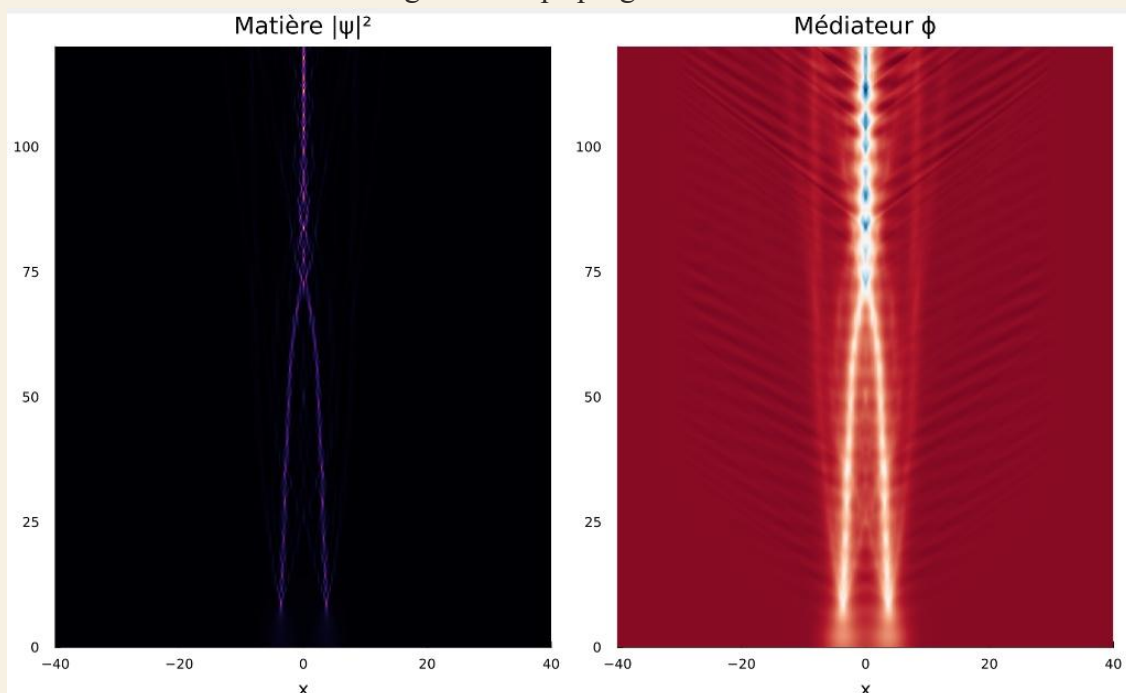
Rolling space–time history of the mediator ϕ





Ci-dessous, nous voyons sur les fenêtres 3 et 4 l'émission d'ondes au sein du champ médiateur après la fusion des deux solitons.

Et-ci-dessous, une simulation Julia de plus grande résolution du même processus de fusion de deux solitons de même charge. Le temps progresse cette fois de bas en haut.



Le panneau de gauche représente la densité du champ de matière ($|\psi|$), tandis que le panneau de droite révèle la structure du champ scalaire médiateur (ϕ).

On voit ici bien le rayonnement émis par la fusion et la respiration du soliton final.

Le plus intéressant apparaît lorsqu'on fait se collisionner deux solitons de charges opposées. Dans certaines conditions favorables, nous pouvons avoir des interférences destructives.

Par exemple, si on a une superposition entre deux ondes de même amplitude, soit : $\psi_{total} = Re^{i(px-\omega t)} + Re^{-i(px-\omega t)}$

Alors $\psi_{total} = 2R \cos(px - \omega t)$; le champ devient réel (les charges se neutralisent). Cependant, ce qui est la source du champ ϕ n'est pas la charge mais $\psi^*\psi$.

Or $\psi^*\psi = 4R^2 \cos^2(px - \omega t)$

Le champ ψ pourrait donc agir comme un oscillateur périodique qui génère un rayonnement ϕ . En contre-partie, comme l'énergie est conservée, la source du rayonnement serait amortie et finirait par s'épuiser. On aurait une annihilation relativement « douce » de matière-anti-matière ! Mais la réalité peut être plus explosive : au niveau du nœud entre les deux trajectoires, de puissants gradients du champ ψ peuvent augmenter la pression du potentiel quantique, et le soliton peut se disloquer violemment, en émettant dans ce processus du rayonnement ϕ énergétique. Mais en contrepartie de cette violence, une partie de l'énergie du champ ψ est sauvée sous forme de « poussière », et l'annihilation n'est donc pas totale. La théorie classique des champs permet donc, comme la théorie quantique des champs, des processus d'annihilation matière-anti-matière. Mais contrairement au cas quantique, ces processus ne sont pas « complets » : la matière-antimatière ne disparaît pas complètement dans un flash de rayonnement ; juste en partie. Et le processus n'est cependant pas automatique : il faut que la collision agite les fréquences du champ ϕ au-delà du seuil de masse. Il

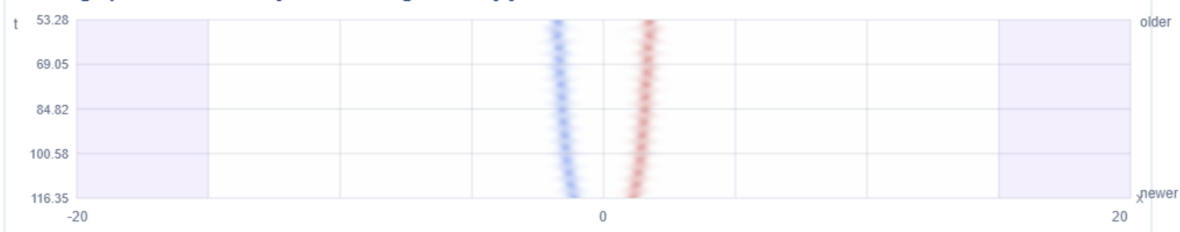
faut donc que les solitons soient suffisamment concentrés pour induire des gradients importants. En même temps, il faut que les solitons restent stables pour éviter le régime tachyonique, ce qui empêche d'avoir de solitons trop concentrés. La fenêtre pour obtenir une belle désintégration est donc en réalité réduite. Mais c'est déjà une belle réussite de ce modèle de pouvoir rendre compte de processus comme l'existence de l'antimatière et du processus d'annihilation matière-antimatière !



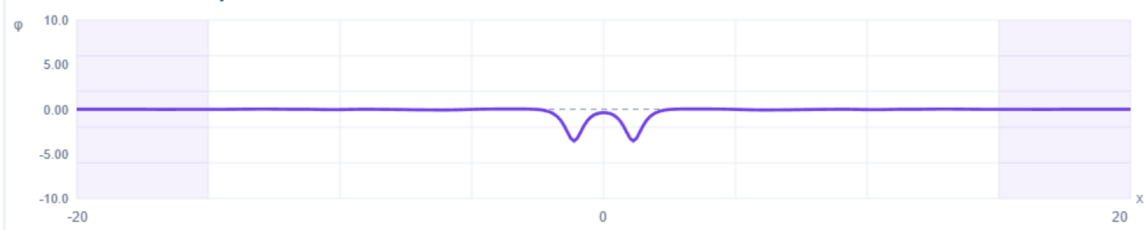
Complex matter field ψ — U(1) charge density



Rolling space–time history of the charge density j^0



Real mediator field ϕ



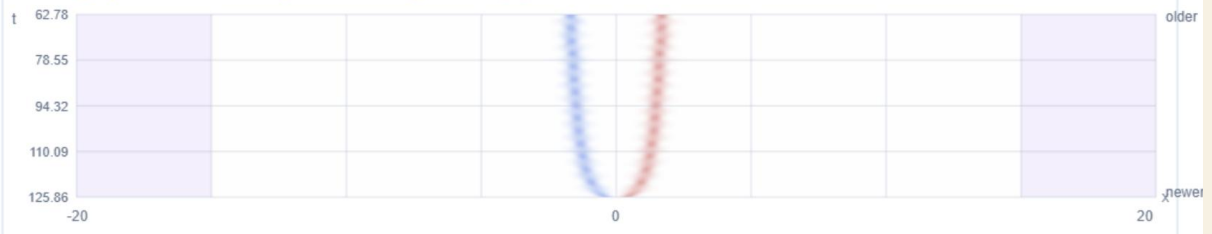
Rolling space–time history of the mediator ϕ



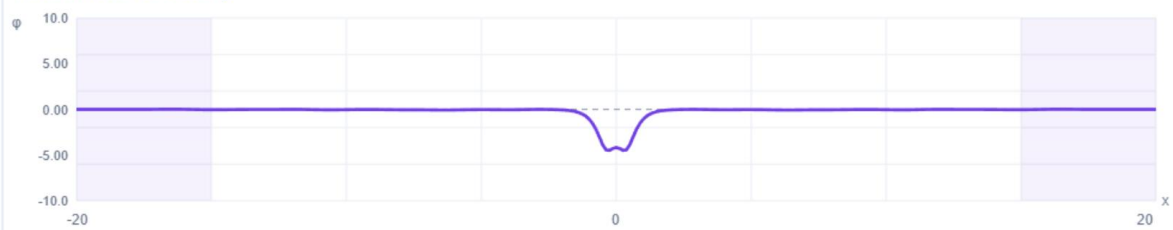
Complex matter field ψ — U(1) charge density



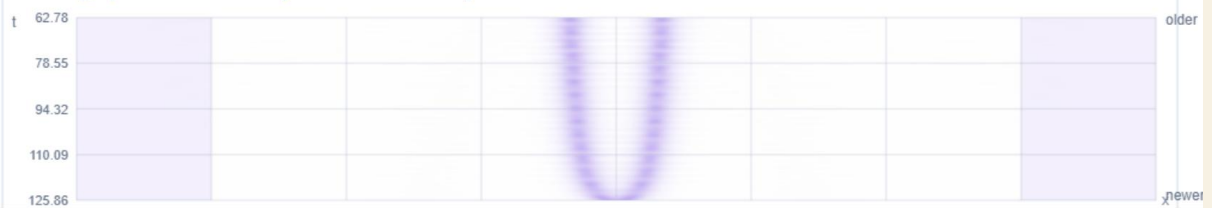
Rolling space–time history of the charge density j^0



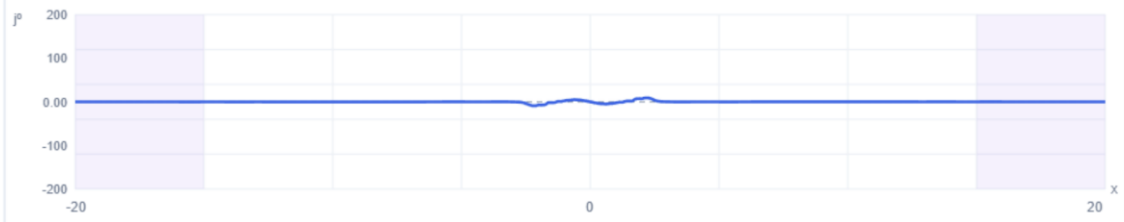
Real mediator field ϕ



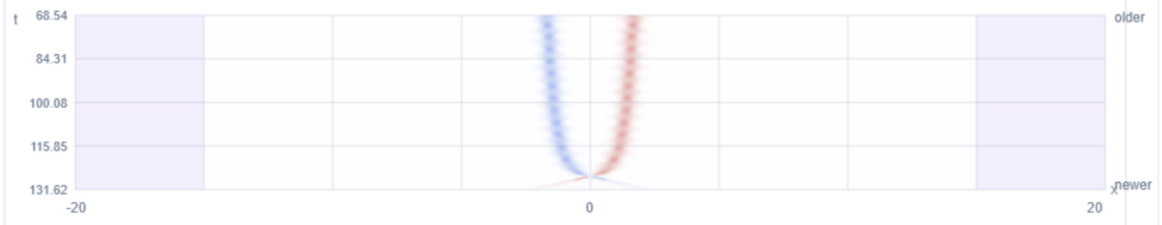
Rolling space–time history of the mediator ϕ



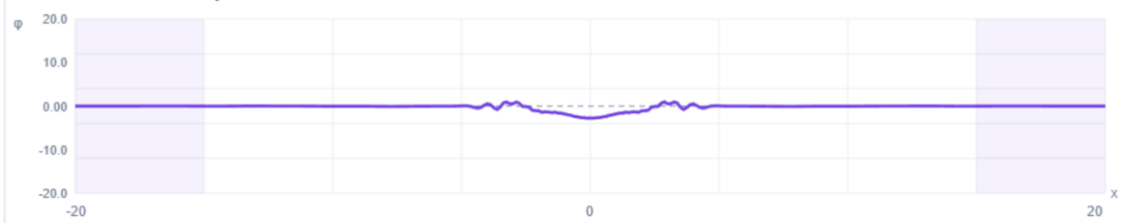
Complex matter field ψ — U(1) charge density j^0



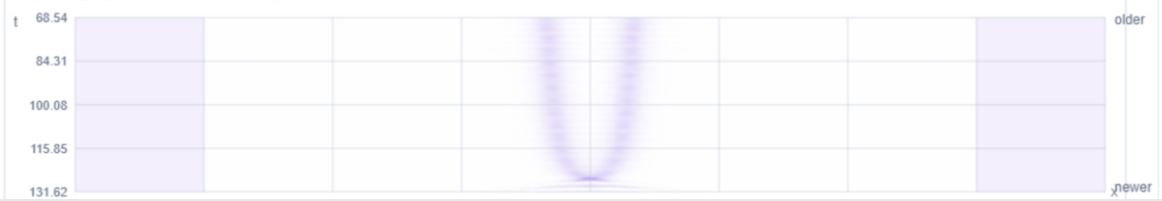
Rolling space-time history of the charge density j^0



Real mediator field ϕ



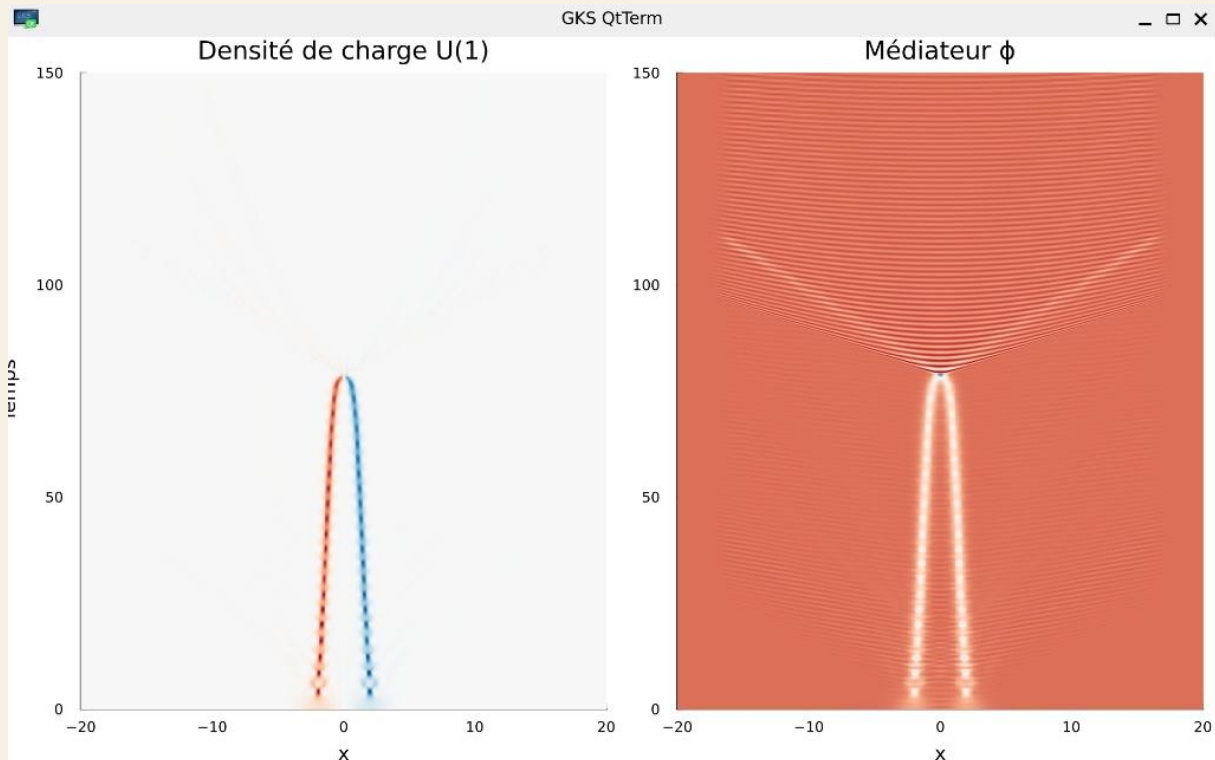
Rolling space-time history of the mediator ϕ



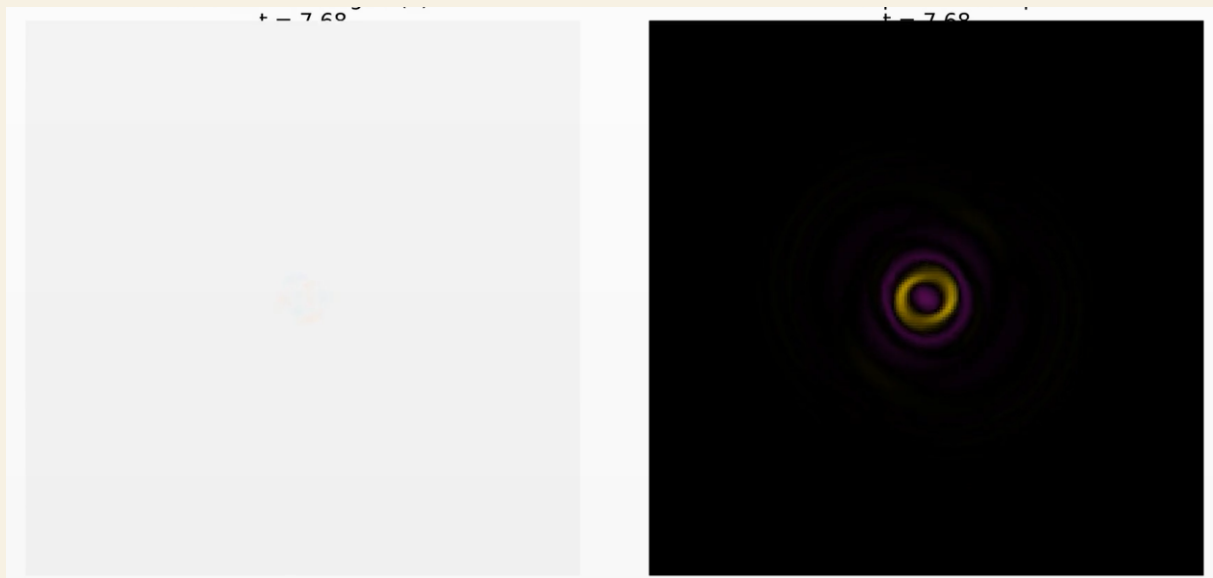


Faites vos collisions matière-antimatière sur [la même animation, accessible sur la page de présentation](#). Attention : une telle annihilation est en réalité difficile à obtenir, la fenêtre entre des solitons trop concentrés (régime tachyonique) et pas assez (processus trop doux pour exciter le champ) est extrêmement réduite.

Ci-dessous, une image du même processus sur une simulation Julia de plus grande résolution :



Sur [la page de présentation de l'article](#), je propose également une vidéo et une animation d'une collision suivie d'une annihilation en 2D, dont voici une image qui correspond à un moment post-annihilation.



Une dernière chose dont ce modèle permet de rendre compte : la création de la matière et de l'antimatière à partir du rayonnement. Reprenons l'équation d'évolution couplée du champ de matière ψ en présence du champ scalaire médiateur ϕ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \Omega_\psi^2 \psi = -g\phi\psi$$

Cette équation fondamentale recèle le mécanisme complet de la création de paires particule-antiparticule. Néanmoins, une analyse attentive du terme source à droite de l'égalité ($-g\phi\psi$) révèle une contrainte physique majeure : ce terme est proportionnel à ψ . Si l'espace est initialement vide de

matière ($\psi = 0$), le terme source est strictement nul. Une onde scalaire ϕ , aussi énergétique soit-elle, traversant un vide absolu, ne produira rien.

Pour que la création de matière s'amorce, il est impératif qu'il existe une "graine" initiale. Dans le cadre de la théorie quantique des champs, cette graine est naturellement fournie par les **fluctuations quantiques du vide**. Même dans l'état fondamental d'un champ quantique ψ , celui de plus basse énergie, l'écart quadratique moyen du champ $\langle \psi^2 - \langle \psi \rangle^2 \rangle$ n'est pas nul. Ce qui veut dire qu'une mesure du champ lorsqu'il est dans son état fondamental ne donne pas nécessairement une valeur nulle. C'est ce qui correspond aux fluctuations quantiques du vide. Ceci est souvent présenté comme le fait que le champ ne cesse d'osciller, ou de produire des paires de particules virtuelles qui s'annihilent ensuite. Ce sont des images trompeuses : l'état quantique du champ lui-même peut être parfaitement stable : il ne correspond simplement pas à un état de valeur de champ déterminé.

En physique classique, il n'existe aucun correspondant identique rigoureux à cet état de vide. La configuration du champ de plus basse énergie, dans notre modèle, correspond simplement à une configuration dans laquelle le champ est nul, partout et tout le temps. Mais nous pouvons tout de même mimer l'état du vide quantique en injectant quelques très petites fluctuations dans notre champ classique vide et cet expédient est suffisant pour permettre l'agitation du champ ψ vers des valeurs d'énergie élevées – l'équivalent classique d'une création de paires de particules-antiparticules.

Pour comprendre comment l'onde ϕ interagit avec ces petites fluctuations pour créer de la matière macroscopique, il faut se tourner vers la dynamique des ondes complexes. En théorie des champs, comme nous l'avons vu, le sens d'évolution de la phase temporelle distingue la matière de l'antimatière :

- Un mode de matière (particule) de vecteur d'onde k et d'énergie ω_k s'écrit :

$$\psi_k \propto e^{i(kx - \omega_k t)}$$

- Un mode d'antimatière (antiparticule) de vecteur d'onde P et d'énergie ω_P s'écrit avec une phase temporelle inversée : $\psi_P \propto e^{-i(Px - \omega_P t)}$

Le champ médiateur ϕ étant réel, son onde progressive d'impulsion q et de fréquence ω_q se décompose en la somme de deux ondes complexes conjuguées :

$$\phi \propto e^{i(qx - \omega_\phi t)} + e^{-i(qx - \omega_\phi t)}.$$

Lorsqu'une onde excitatrice ϕ balaye l'espace, elle interagit avec une fluctuation de matière ψ_k . Le produit de ces ondes dans le terme de couplage ($-g\phi\psi_k$) génère de nouvelles ondes par un phénomène de **battement spatio-temporel**.

$$g\phi\psi_k \propto (e^{i(qx - \omega_\phi t)} + e^{-i(qx - \omega_\phi t)}) \times e^{i(kx - \omega_k t)} = e^{i((k+q)x - (\omega_\phi + \omega_k)t)} + e^{i((k-q)x - (\omega_k - \omega_\phi)t)}$$

Le terme $e^{i((k-q)x - (\omega_k - \omega_\phi)t)}$ nous intéresse ici particulièrement. Effectivement, si $k - q = -P$ et $\omega_\phi - \omega_k = \omega_P$, alors ce terme exciteur va rentrer en résonance avec le mode d'antimatière $\psi_P \propto e^{-i(Px - \omega_P t)}$. Elle va donc fortement amplifier ce mode et ainsi créer de l'antimatière. Et le processus symétrique se produit lorsque l'onde ϕ interagit avec ψ_P . Cette fois :

$$g\phi\psi_P \propto (e^{i(qx - \omega_\phi t)} + e^{-i(qx - \omega_\phi t)}) \times e^{-i(Px - \omega_P t)} = e^{i((q-P)x - (\omega_\phi - \omega_P)t)} + e^{-i((p+q)x - (\omega_P + \omega_\phi)t)}$$

Le terme $e^{i((q-P)x-(\omega_\phi-\omega_p)t)}$ exerce alors une excitation qui rentre en résonance avec l'onde ψ_k à condition que $q - P = k$ et $\omega_\phi - \omega_p = \omega_k$, ce qui sont exactement les mêmes conditions que précédemment. Par ailleurs, un phénomène de rétroaction se met en place : au fur et à mesure que ψ_p s'amplifie, l'excitation qui résonne avec ψ_k s'amplifie, et au fur et à mesure que ψ_k s'amplifie, l'excitation qui résonne avec ψ_p s'amplifie, jusqu'à ce que l'onde ϕ se vide de son énergie. Bien sûr à cause de la conservation de la charge, les deux processus doivent se faire simultanément. Ce phénomène s'appelle la résonance paramétrique, et on pense que ce phénomène aurait pu jouer un rôle important à la fin de l'inflation cosmique, dans la phase que l'on nomme « préchauffage ». Un champ responsable de l'inflation, l'inflaton, était alors extrêmement excité et est rentré en résonance paramétrique avec d'autres champs massifs, provoquant ainsi une cascade de création de particules et d'antiparticules.

Par ailleurs, si on traduit tout cela en termes de particules, c'est-à-dire si nous traduisons les termes p, q et k en termes d'impulsion, et les termes ω_p, ω_k et ω_ϕ en termes d'énergie, les conditions de résonances fournissent directement les conditions de la conservation de l'impulsion et de l'énergie

$$\omega_\phi = \omega_k + \omega_p \text{ et } q = k + P$$

dans un processus de désintégration d'une particule d'énergie ω_ϕ et d'impulsion q en une paire de particule-antiparticule d'énergie ω_k et ω_p et d'impulsion k et P .

Enfin, les conditions de résonance imposent un seuil strict pour que ce phénomène ait lieu. Puisque la fréquence minimale d'un champ massif est définie par sa masse ($\omega \geq \Omega_0$), le rayonnement incident ϕ doit obligatoirement posséder une fréquence supérieure ou égale au double de la masse de ψ :

$$\omega_\phi \geq 2\Omega_\psi$$

Si l'énergie du champ ϕ dépasse ce seuil, l'excédent est directement converti en énergie cinétique pour les particules filles, qui s'éloigneront l'une de l'autre avec des impulsions opposées.

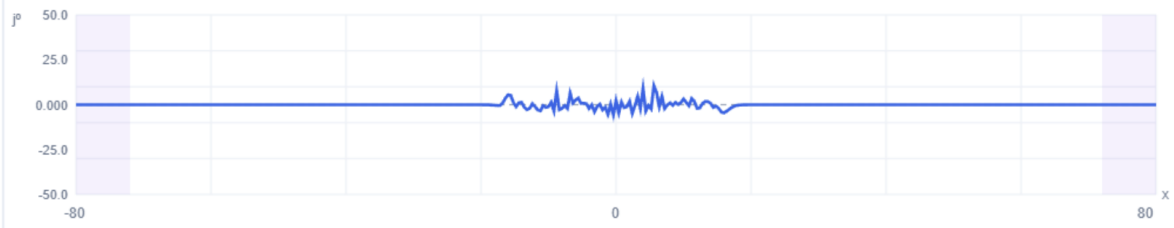


Sur cette image, le champ complexe chargé est quasiment nul. Les fluctuations visibles sont en réalité très faibles (voir l'échelle en haut à gauche). Le champ médiateur est très excité au centre.

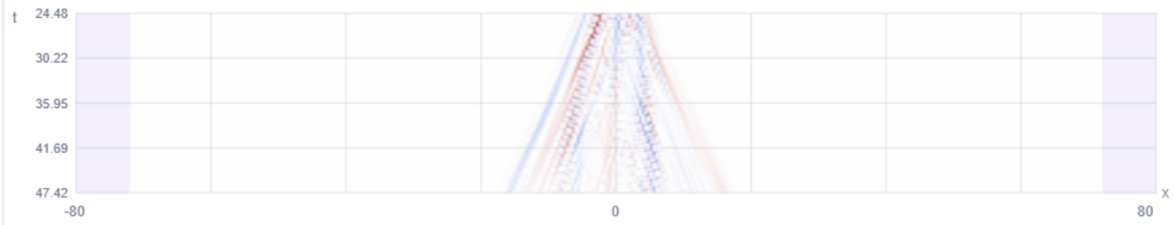


La création de la « matière chargée » commence ici : le champ médiateur excite les modes du champ chargé.

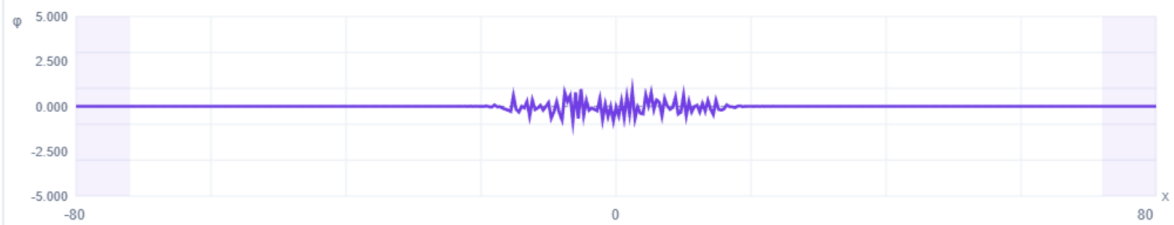
Complex matter field ψ — U(1) charge density



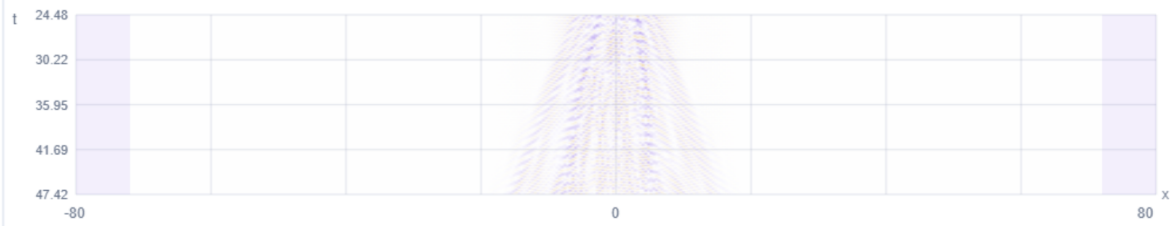
Rolling space–time history of the charge density j^0



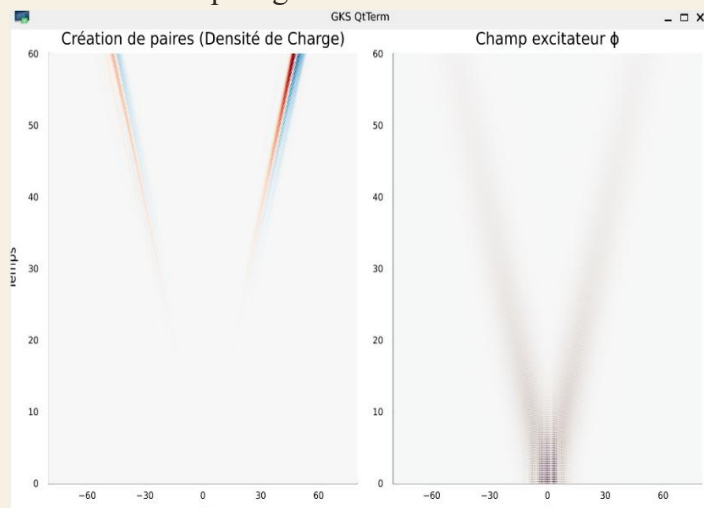
Excitator / mediator field ϕ



Rolling space–time history of the pump field ϕ



Une « pluie » de soliton-anti-solitons est émise. Ci-dessous, une image d'une simulation Julia en plus grande résolution :



Dieu agita le champ ϕ et la matière chargée fut. Effectivement, une des meilleures images que l'on pourrait donner à un créateur de matière est de le comparer à un joueur de guitare qui excite ses cordes en les faisant vibrer : la matière correspondrait au son émis par la guitare !



Figure 1: Le Créateur agite le champ scalaire médiateur ; de sa désexcitation naissent les excitations du champ chargé. Mieux que des poussières d'étoile, vous êtes des notes de musique !



Figure 2 : Pour ceux qui sont plus convaincus par la théorie de la simulation...



Figure 3 : Enfin, la version pastafarienne de la création de la matière.

Retour sur « l'émergence de la relativité »

Fin de la récréation.

Dans la partie 3, nous avons exploré, à partir d'un modèle mécanique très simple de champ, le caractère relativiste qui émergeait de la dynamique des paquets d'onde. Nous avons notamment vu que la phase de l'onde au niveau du centre d'un paquet d'onde se comportait comme une sorte d'horloge subissant la dilatation du temps (la fameuse horloge de Louis de Broglie). Nous n'avions pas alors pu illustrer la contraction des longueurs, faute d'avoir une structure stable.

Nous sommes avec notre modèle présent en mesure de démontrer de manière encore plus spectaculaire des effets relativistes qui émergent naturellement de la simple dynamique des solitons.

Pour ce faire, nous allons réaliser une expérience d'accélérateur de particules ! Nous allons préparer un soliton stable au repos qui respire très faiblement. Nous allons mesurer sa période de respiration et son épaisseur moyenne. Puis au bout d'un certain temps, nous allons produire un champ électrique accélérateur. Nous avons déjà vu, dans le chapitre précédent, un modèle mécanique d'un couplage du

champ de Klein-Gordon avec un champ électromagnétique. Il suffit de rajouter un terme d'interaction dans l'équation dynamique du champ chargé :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (m_\psi^2 + g\phi)\psi$$

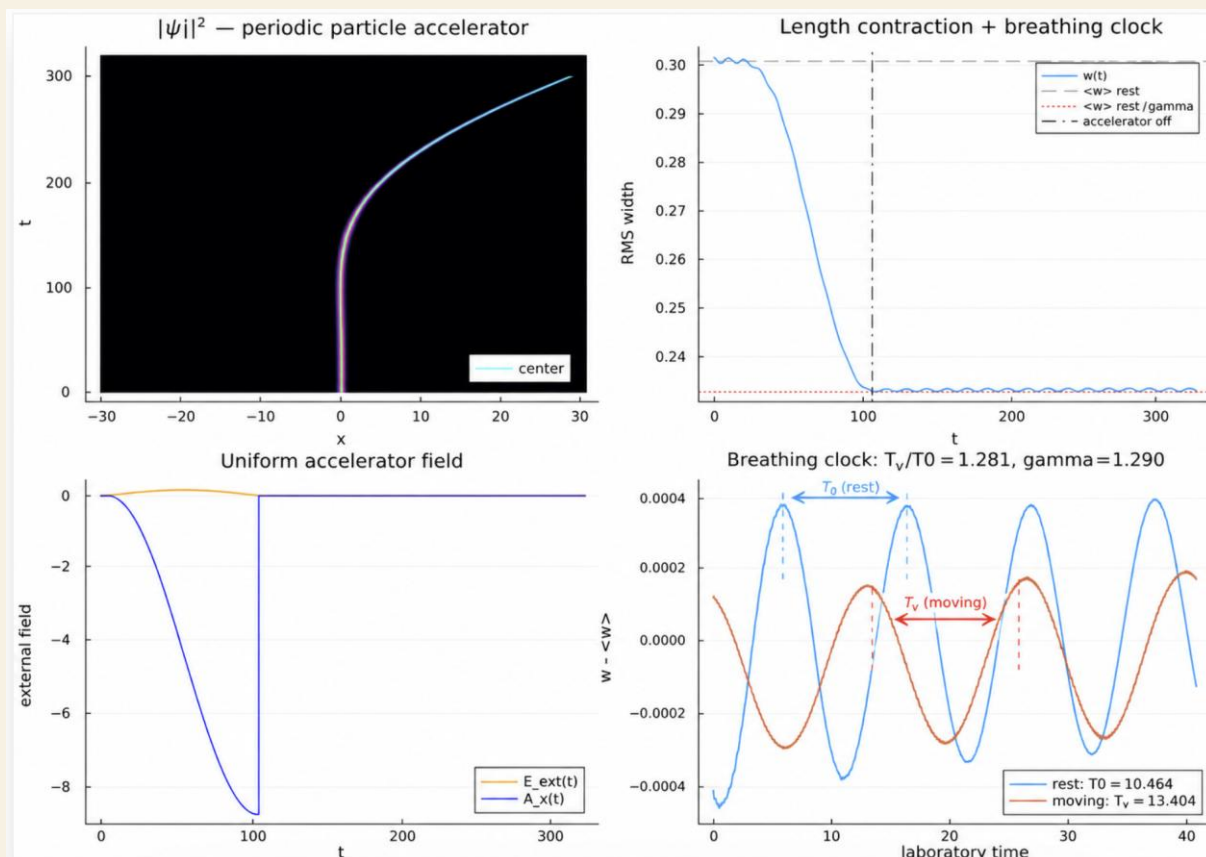
$$\rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - ieA_x(t) \right)^2 \psi - (m_\psi^2 + g\phi)\psi$$

Où e représente la constante de couplage entre le champ chargé et le champ électromagnétique, et A_x représente le potentiel vecteur électromagnétique d'où le champ électrique est dérivé. Ici, le champ électromagnétique est imposé de l'extérieur. On ne se préoccupe donc pas de l'équation dynamique du champ électromagnétique.

Ce couplage est équivalent à considérer qu'en chaque point, le champ complexe ψ se meut dans un espace complexe qui est tourné, et $eA_x(t)$ correspond à la différence d'angle entre deux sites voisins. Lors de la partie 3, nous avons choisi un autre couplage pour représenter un champ électrique : le couplage temporel : $\frac{\partial}{\partial t} - ie\Phi$. L'espace interne complexe était joué par des plateaux tournants, et $e\Phi$ correspondait à une vitesse de rotation des plateaux. La condition pour qu'il y ait un champ électrique était que les vitesses de rotation entre deux sites voisins ne soient pas les mêmes, autrement dit, que $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0$. Ici, nous faisons un choix différent : $A_x(t)$ correspond uniquement à une différence d'angle du « plateau complexe » entre deux sites voisins. Mais ce qui induit un champ électrique reste une différence de vitesse de rotation de « plateaux » entre deux sites voisins. Ce qui veut dire que la condition de présence d'un champ électrique est cette fois : $\frac{\partial A_x}{\partial t} \neq 0$. Deux choix différents de potentiel peuvent ainsi aboutir à un même résultat physique : une différence de vitesse de rotation de l'espace interne du champ ψ entre des points voisins. Cette équivalence illustre une idée que nous explorerons en détail lors du prochain chapitre et qui est au cœur de la physique théorique moderne : l'invariance locale de jauge. Pour ceux qui se souviennent de leur cours d'électromagnétisme, un champ électrique est effectivement donné par $E_x(x, t) = -\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, t)}{\partial t}$, donc on peut bien produire un champ électrique en jouant sur Φ , en jouant sur A_x ou en jouant sur les deux.

Ce champ électromagnétique va accélérer notre soliton, puis, au bout d'un certain temps, nous coupons progressivement le champ. Il est important que le champ soit initié puis arrêté très progressivement afin de ne pas exciter les degrés de liberté internes du soliton, auquel cas le soliton pourrait se déformer pour des raisons qui n'ont rien à voir avec des phénomènes relativistes. On parle alors d'accélération adiabatique. Lorsque le champ est coupé, le soliton poursuit sa route à une vitesse relativiste constante. Nous mesurons alors sa largeur et sa période de respiration, que nous pouvons comparer à celles au repos. Voici pour le protocole.

Maintenant, place à l'expérience. Dans ce premier essai, le soliton atteint après accélération une vitesse proche de 60% de celle de la lumière. L'image ci-dessous donne les résultats de ma simulation Julia :

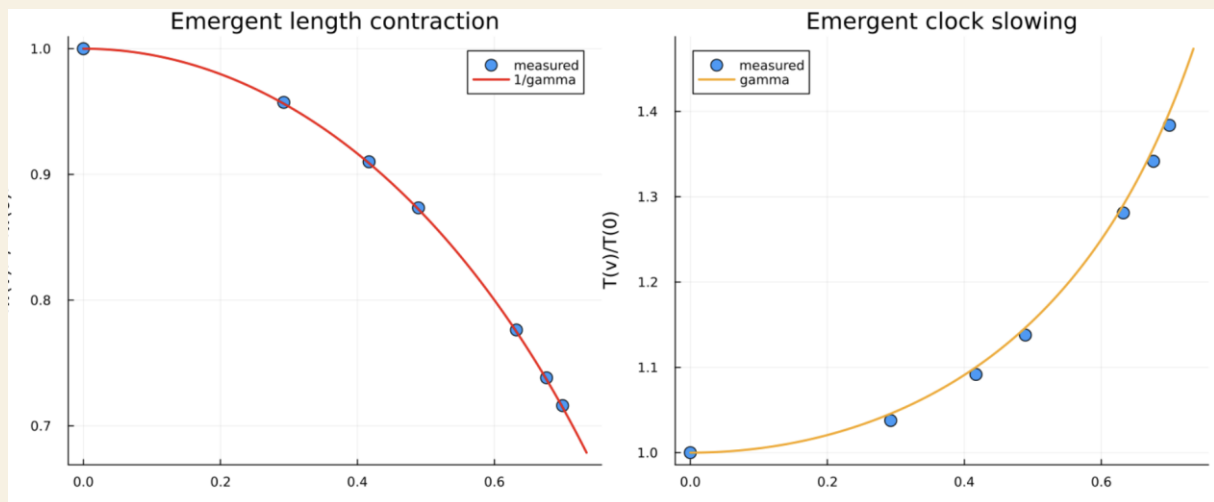


Sur la fenêtre en haut à gauche, nous voyons le soliton accéléré puis poursuivre en ligne droite. Sur l'image en bas à gauche, la courbe jaune représente le champ électrique.

Sur la fenêtre en haut à droite, nous voyons notre premier résultat : la largeur du soliton passe d'une longueur de 0.30 à une longueur d'environ 0.23. La ligne rouge en pointillés correspond à la prédiction théorique de la contraction des longueurs de Lorentz : l'accord du résultat avec la prédiction théorique de la relativité est excellent.

La fenêtre en bas à droite représente le rythme de la respiration. La courbe bleue correspond à la respiration du soliton au repos. La courbe rouge celle du soliton en mouvement. Le rapport relativiste théorique entre les deux périodes est de 1.290. Celui obtenu est de 1.281. Là encore, le résultat est donc proche de celui attendu.

Nous reproduisons maintenant cette expérience plusieurs fois pour plusieurs valeurs du champ électromagnétique. Voici les résultats :



À gauche, le coefficient de contraction des longueurs en fonction de la vitesse. Les points bleus correspondent aux résultats de la simulation. La courbe rouge correspond à la valeur théorique donnée par la relativité dans des conditions idéales. Encore une fois, l'accord est impeccable. À droite, il s'agit des mesures du coefficient du ralentissement des horloges, en fonction de la vitesse comparée à la courbe théorique prédite par la relativité dans des conditions idéales. Tout en étant légèrement moins précis que ceux de la contraction des longueurs, les résultats sont tout de même bons. Il est compréhensible que les résultats ne soient pas parfaits : les périodes et les longueurs sont calculés à partir de données restreintes dans la simulation, l'accélération n'est sans doute pas complètement adiabatique et la résolution numérique spatiale et temporelle n'est pas infinie. Mais ces résultats restent convaincants : ils montrent que les effets relativistes de structures comme des solitons peuvent être compris comme résultant de la dynamique des champs eux-mêmes.

Une animation interactive permet également de visualiser la contraction des longueurs et le ralentissement de l'horloge interne du soliton : [voir l'animation sur la page de présentation](#).

Ceci ne devrait pas nous étonner : les équations que nous avons choisies ont les symétries relativistes requises : elles sont invariantes de Lorentz. Il n'est donc en soi pas mystérieux qu'elles conduisent à des phénomènes dynamiques relativistes. Le plus remarquable est cependant la chose suivante : ces équations dynamiques, nous l'avons vu lors de la partie précédente, peuvent être obtenues comme des passages à la limite continue de modèles mécaniques qui ne sont pas relativistes (des ressorts, des plateaux tournants, etc.) et qui, de plus, admettent un référentiel privilégié. Ici, seul le choix de l'interaction entre le champ complexe chargé et le champ réel médiateur n'a pas été explicité en termes mécaniques, mais ce n'est pas impossible de le faire. Mais l'important, sur le plan conceptuel, n'est pas qu'ils soient réalisables mécaniquement. L'important est que le caractère relativiste des phénomènes apparaît comme émergent. Cette façon de concevoir les choses démontre une possibilité qui n'est pas réfutée par les données actuelles de la physique : la nature relativiste de nos théories physiques de pointe pourrait également être émergente, et des expériences à très haute énergie pourraient en apporter la preuve. De la même manière que la simulation Julia que nous venons d'étudier échouerait à maintenir son accord avec la théorie de la relativité si nous poussions la vitesse jusqu'à une valeur très proche de celle de la lumière.

En contrepartie, l'absence actuelle de désaccord avec les prédictions de la théorie de la relativité lors des expériences de physique de haute énergie nous indique que la symétrie de Lorentz est valide d'une manière très précise jusqu'à une énergie très élevée. Il se pourrait également qu'elle soit une symétrie parfaite de la nature, du moins dans le cadre d'un espace-temps plat. Nous n'en savons rien. Mais ce que cela montre, c'est que, d'un point de vue fondamental, l'absence de référentiel privilégié n'est

pour l'instant pas un résultat imposé par la physique actuelle. Et en même temps, dans tous les cas, la physique actuelle explique très bien pourquoi on doit s'attendre à ce qu'il soit au moins très difficile de détecter un référentiel privilégié.

Le chapitre suivant sera le dernier chapitre portant sur la physique classique des champs. On y parlera des théories de jauge. Nous construirons notamment progressivement un véritable mini modèle standard des particules classiques : le champ électromagnétique, puis le champ de Higgs seront intégrés. Avec l'introduction du champ de Higgs, nous examinerons le mécanisme qui est à l'origine de la génération de la masse des particules fondamentales : la brisure spontanée de symétrie.

Nous examinerons également, en restant dans un cadre classique, quelque chose qui est au centre de la physique des champs quantiques : la dépendance des charges et des masses des particules à l'échelle d'énergie étudiée – ce que l'on nomme le groupe de renormalisation : un nouvel exemple d'émergence de lois effectives à partir d'une physique plus fondamentale qui est, elle, pour l'instant inconnue.